



# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Δυαδική Ταξινόμηση - Αλγόριθμοι Πυρήνα (Kernel Methods)

1. Διαχωρισιμότητα Προτύπων, Θεώρημα του Cover
2. Radial-Basis Function (RBF) Networks
3. RBF Hybrid Learning
4. Support Vector Machines (SVM)

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης

[maglaris@netmode.ntua.gr](mailto:maglaris@netmode.ntua.gr)

[www.netmode.ntua.gr](http://www.netmode.ntua.gr)

Αίθουσα 02, Νέα Κτίρια ΣΗΜΜΥ

Τρίτη 17/5/2022

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

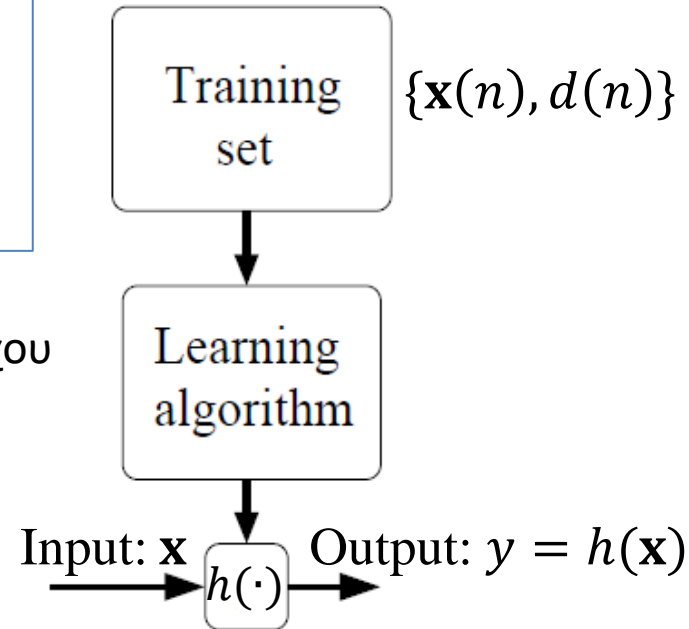
## Γενικό Μοντέλο Επιβλεπόμενης Μάθησης - *Supervised Learning* (επανάληψη)

Βασισμένο στο Andrew Ng, "CS229 Lecture Notes", Stanford University, Fall 2018

- Στόχος του συστήματος είναι η αντιστοίχιση ενός δειγματικού στοιχείου εισόδου (*input sample point, example*)  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$  σε τιμές εξόδου  $y$  που εκτιμούν επιθυμητές (*desired*) τιμές  $d$  (π.χ. πρόβλεψη ή ταξινόμηση). Τα στοιχεία  $x_i$  είναι αριθμητικές τιμές που κωδικοποιούν  $m$  ειδοποιά χαρακτηριστικά (*features*) του δειγματικού στοιχείου  $\mathbf{x}$

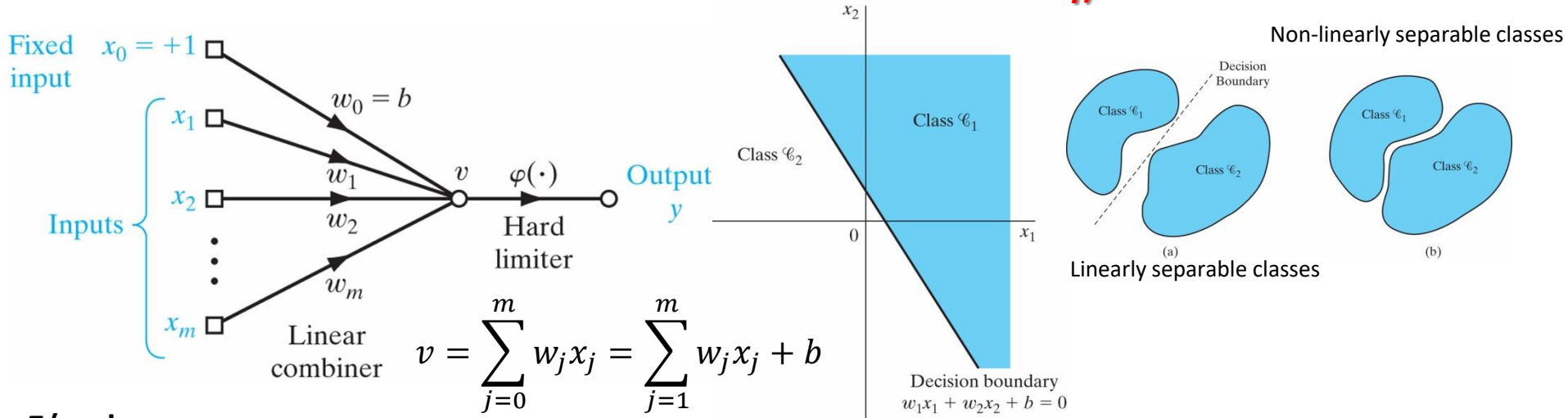
Ζητείται ο προσδιορισμός της συνάρτησης εισόδου - εξόδου  $y = h(\mathbf{x}) \cong d$  που προκύπτει από δείγμα μάθησης (*Training Set*)  $N$  *labeled* ζευγών  $\{\mathbf{x}(n), d(n)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  γνωστών σε εξωτερικό εκπαιδευτή (*supervisor*)

- Η μορφή και οι παράμετροι της  $h(\cdot)$  προσδιορίζονται με αλγόριθμο μάθησης που συγκλίνει σε προσέγγιση του στόχου της υπόθεσης για τα  $N$  στοιχεία του δείγματος μάθησης  $d(n) \cong y(n) = h(\mathbf{x}(n))$
- Αν ο στόχος ικανοποιείται με μικρό αριθμό διακριτών επιλογών της  $y$  πρόκειται για πρόβλημα Ταξινόμησης, *Classification* (για δύο επιλογές έχουμε δυαδική ταξινόμηση)
- Αν η έξοδος  $y$  λαμβάνει συνεχείς τιμές, το πρόβλημα αναφέρεται σαν Παλινδρόμηση, *Regression*



# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Rosenblatt's Perceptron (επανάληψη)



### Σύνοψη:

- Ένας νευρώνας με γραμμικό induced local field  $v$  και συνάρτηση ενεργοποίησης  $\varphi(v)$  πρόσημου (**Hard Limiter**) για ταξινόμηση δειγματικών στοιχείων  $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_m]^T$  σε δύο **γραμμικά διαχωριζόμενες** κλάσεις:  $C_1$  αν  $y = \varphi(v) = 1$ ,  $C_2$  αν  $y = \varphi(v) = -1$
- Τα βάρη  $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_m]^T$  ρυθμίζονται on-line (stochastic iterative method) με την εφαρμογή **Error-correction Algorithm** σε δειγματικά στοιχεία μάθησης  $\{\mathbf{x}(n), d(n)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  σε περιβάλλον **supervised learning** προς ελαχιστοποίηση σφαλμάτων  $[d(n) - y(n)]$

$$\mathbf{w}(n + 1) = \mathbf{w}(n) + \eta[d(n) - y(n)]\mathbf{x}(n)$$

Η **hyperparameter**  $\eta$ ,  $0 < \eta \leq 1$  (**learning-rate parameter**) αν είναι **μικρή** οδηγεί την επαναληπτική διαδικασία μάθησης σε σύγκλιση. Αν είναι **μεγάλη** μπορεί να επιταχύνει τη σύγκλιση π.χ. σε περιβάλλοντα με μεγάλες αποκλίσεις των δεδομένων  $\mathbf{x}(n)$ , αλλά μπορεί να οδηγήσει σε αστάθειες λόγω ταλαντώσεων περί την βέλτιστη τιμή

Σε περιβάλλον δειγματικών στοιχείων  $\mathbf{x}$  κατανομής Gauss, η ταξινόμησή τους σε δύο κλάσεις  $C_1, C_2$  μέσω **Bayes Classifier** (ελαχιστοποίηση ρίσκου σφάλματος με βάση a-priori πιθανότητες  $p_1, p_2$ ) ταυτίζεται με το **Rosenblatt Perceptron**

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Αντιστοίχιση Προτύπων - Pattern Association (S. Haykin: *Introduction*, Section 9)

Διαδικασία *μάθησης* για αντιστοίχιση  $q$  παραδειγμάτων-κλειδιών  $\mathbf{x}_k$  (*key patterns*) σε  $q$  αποθηκευμένα πρότυπα  $\mathbf{y}_k$  (*memorized patterns*)

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{y}_k, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

Τα διανύσματα  $\mathbf{x}_k$  έχουν  $m$  διαστάσεις και τα  $\mathbf{y}_k$  ίδιο ή διαφορετικό αριθμό διαστάσεων

Μέθοδοι μάθησης :

- Αυτοαντιστοίχιση (*Autoassociation*),  $\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k$ : **Unsupervised Learning**
- Ετεροαντιστοίχιση (*Heteroassociation*),  $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{y}_k$ : **Supervised Learning**

Φάσεις Αντιστοίχισης Προτύπων:

1. Αποθήκευση (*Storage*) Προτύπων: Αποθήκευση στη μνήμη των *key patterns* με κλειδί ανάκτησης τα  $\mathbf{x}_k$
2. Ανάκληση (*Recall*) Προτύπων: Αντιστοίχιση σε αποθηκευμένο πρότυπο  $\mathbf{y}$  νέου διανύσματος εισόδου  $\mathbf{x}$  (*stimulus, input vector*) που αποτελεί παραμορφωμένη είσοδο ενός *key pattern*  $\mathbf{x}_k$  (π.χ. χειρόγραφη απόδοση αριθμού, εικόνα μολυσμένη από θόρυβο)



**Παράδειγμα Labeled Δείγματος Μάθησης:** MNIST Database για ταξινόμηση χειρόγραφων αριθμών (0, ..., 9) σε  $q = 10$  πρότυπα [https://en.wikipedia.org/wiki/MNIST\\_database](https://en.wikipedia.org/wiki/MNIST_database)

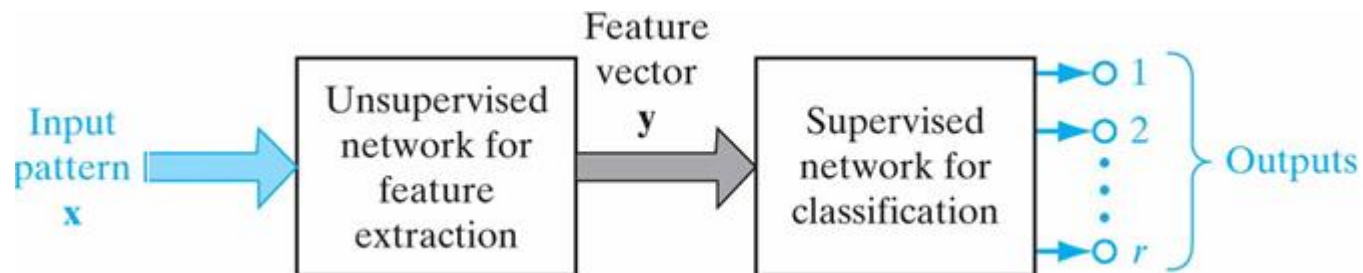
# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Αναγνώριση Προτύπων - Pattern Recognition (S. Haykin: *Introduction, Section 9*)

Αναγνώριση εισόδου, εξαγωγή κύριων χαρακτηριστικών και ανάθεση – ταξινόμηση νέων προτύπων (*patterns*) σε ορισμένη κατηγορία (*class*) με κριτήριο τη στατιστική συνάφεια με αποθηκευμένα πρότυπα στο σύστημα κατά τη διαδικασία μάθησης

Η διαδικασία συνήθως περιλαμβάνει 2 στάδια:

- **Στάδιο Εξαγωγής Χαρακτηριστικών (Feature Extraction)**: Μετασχηματισμός εισόδου  $x$  (διάνυσμα  $m$  διαστάσεων) σε ενδιάμεσο διάνυσμα χαρακτηριστικών  $y$   $q$  διαστάσεων (*unsupervised learning*). Αν  $q < m$  έχουμε συμπίεση δεδομένων ή επιλογή σημαντικών χαρακτηριστικών (*important features*) για απλοποίηση της διαδικασίας ταξινόμησης
- **Στάδιο Ταξινόμησης (Classification)**: Αντιστοίχιση του προτύπου  $y$  σε  $r$  διακριτές κλάσεις (*supervised learning* σε κρυφά στρώματα). Αν  $r = 2$  έχουμε δυαδική ταξινόμηση



# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Διαχωρισιμότητα Προτύπων (Separability of Patterns)

### Ταξινόμηση Παραδειγμάτων μέσω Διαχωρίσιμων Προτύπων

Αντιστοίχιση παραδειγμάτων εισόδου  $\mathbf{x}$  (examples, instances) σε  $N$  πρότυπα (patterns)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  ( $\mathbf{x}_i$  διανύσματα με  $m_0$  συνιστώσες) για δυαδική ταξινόμηση σε δύο διαχωρίσιμες κλάσεις  $C_1$  και  $C_2$

### Θεώρημα του Cover (1965)

- Περίπλοκο πρόβλημα ταξινόμησης προτύπων μη γραμμικά ορισμένο σε χώρο πολλών διαστάσεων, είναι πιθανότερο να είναι γραμμικά διαχωρίσιμο (linearly separable) από ότι σε χώρο λίγων διαστάσεων, αν δεν υπάρχουν πυκνά σημεία (πρότυπα)
- Για την εύκολη ταξινόμηση προτύπων προτιμάται η **γραμμική διαχωρισιμότητα** μέσω **μη γραμμικού μετασχηματισμού συντεταγμένων** και ως απαιτούνται **περισσότερες διαστάσεις**

### Κρυφές Συναρτήσεις (Hidden Functions)

Τα  $\mathbf{x}$  μετασχηματίζονται (μη γραμμικά) σε  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  με  $m_1 \geq m_0$  διαστάσεις

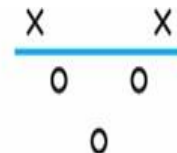
$$\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}) \varphi_2(\mathbf{x}) \dots \varphi_{m_1}(\mathbf{x})]^T$$

Οι  $\varphi_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m_1$  είναι **κρυφές συναρτήσεις**

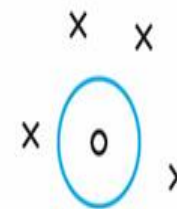
Ο χώρος των προτύπων είναι **γραμμικά διαχωρίσιμος** κατά  $\boldsymbol{\varphi}$  ( **$\boldsymbol{\varphi}$ -separable dichotomy**) όταν υπάρχει διάνυσμα  $\mathbf{w}$  με  $m_1 \geq m_0$  συνιστώσες που να ορίζει δύο γραμμικά διακριτές περιοχές αντίστοιχες με τις  $C_1$  και  $C_2$  των  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in C_1 \text{ και } \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow \mathbf{x} \in C_2$$

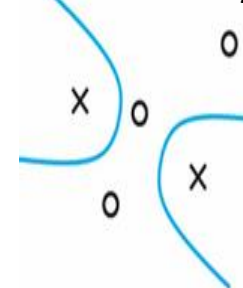
(a) Linearly separable dichotomy



(b) Spherically separable dichotomy



(c) Quadratically separable dichotomy



# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

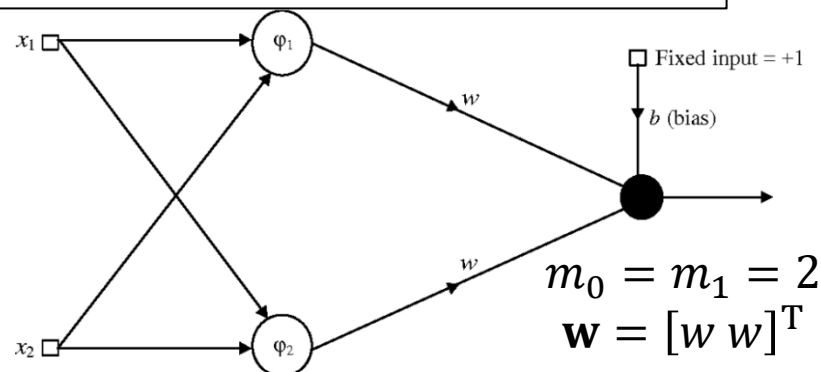
## Διαχωρισιμότητα Προτύπων – Το πρόβλημα XOR

Συνήθης επιλογή για  $\varphi_j(\mathbf{x})$ : **Gaussian Radial-Basis Function (RBF)**

$\varphi_j(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|^2)$  όπου  $\boldsymbol{\mu}_j$  διάνυσμα διαστάσεως  $m_0$  των **μέσων τιμών** (κέντρων) της  $\varphi_j(\mathbf{x})$  και  $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|$  η **Ευκλείδεια απόσταση** του σημείου  $\mathbf{x}$  από το  $\boldsymbol{\mu}_j$

TABLE 5.1 Specification of the Hidden Functions for the XOR Problem of Example 1

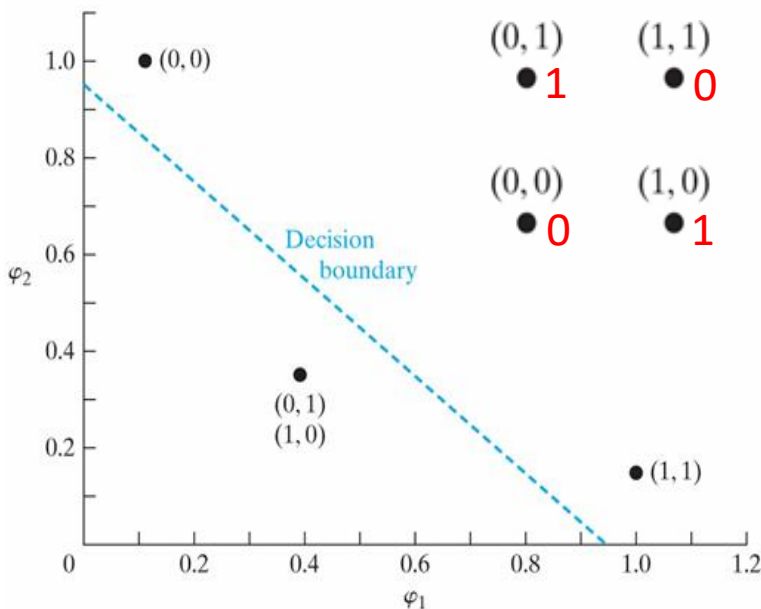
Input Pattern $\mathbf{x}$	First Hidden Function $\varphi_1(\mathbf{x})$	Second Hidden Function $\varphi_2(\mathbf{x})$
(1,1)	1	0.1353
(0,1)	0.3678	0.3678
(0,0)	0.1353	1
(1,0)	0.3678	0.3678



$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}) \ \varphi_2(\mathbf{x})]^T$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_1\|^2), \boldsymbol{\mu}_1 = [1, 1]^T$$

$$\varphi_2(\mathbf{x}) = \exp(-\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_2\|^2), \boldsymbol{\mu}_2 = [0, 0]^T$$



Παράδειγμα Υπολογισμού  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = [1 \ 1]^T$

$$\varphi_1(1,1) = \exp(-\|[1 \ 1]^T - [1 \ 1]^T\|^2) = 1$$

$$\varphi_2(1,1) = \exp(-\|[1 \ 1]^T - [0 \ 0]^T\|^2) = 0.1353$$

Έξοδος:  $y = w\varphi_1(\mathbf{x}) + w\varphi_2(\mathbf{x}) + b$

$$(1,1): w + w \times 0.1353 + b = 0$$

$$(0,1): w \times 0.3678 + w \times 0.3678 + b = 1$$

$$(0,0): w \times 0.1353 + w + b = 0$$

$$(1,0): w \times 0.3678 + w \times 0.3678 + b = 1$$

Λύση

$$w = -2.502$$

$$b = 2.841$$

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Ορισμοί Radial-Basis Function (RBF), Kernels, Hybrid Learning

- **Radial- Based Function (RBF):**  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m_0} \rightarrow \varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = \varphi(r) \in \mathbb{R}$   
 $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$  μέτρο ακτινικής απόστασης διανυσματικών σημείων  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{x}_j$  (συνήθως *Ευκλείδεια*)  
**Μετασχηματισμός:**  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_{m_1}(\mathbf{x})]^T, m_1 \geq m_0$   
**Παράδειγμα: Gaussian RBF**  $\varphi_j(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2\right)$  που αφορά στην Ευκλείδεια απόσταση δειγματικού σημείου (προτύπου, *pattern*)  $\mathbf{x}$  με  $m_0$  χαρακτηριστικά (*features*) από  $N$  δειγματικά σημεία μάθησης (*patterns*)  $\mathbf{x}_j, j = 1, 2, \dots, N$   
**Ταξινόμηση Προτύπων:** Τα  $\varphi_j(\mathbf{x})$  απεικονίζουν  $N$  κρυφά χαρακτηριστικά (*hidden features*) του  $\mathbf{x}$  σαν αποστάσεις από τα κέντρα  $\mathbf{x}_j$  τα οποία προκύπτουν από το δείγμα μάθησης (*patterns*) σε **1<sup>η</sup> Φάση Υβριδικής Μάθησης (Hybrid Learning)** για ταξινόμηση προτύπων γύρω από κέντρα βάρους μέσω μη επιβλεπόμενης μάθησης (π.χ. με αλγόριθμο *K-Means*)
- **Kernel:**  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) \in \mathbb{R}$  μέτρο ομοιότητας ( $\sim$ εσωτερικό γινόμενο) του διανύσματος  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m_0}$  με διάνυσμα  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{m_0}$   
**Σχέση με RBF:**  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j), j = 1, 2, \dots, m_1$  (εσωτερικό γινόμενο). Λόγω του **Θεωρήματος του Cover** επιλέγεται συνήθως  $m_1 > m_0$  για μετασχηματισμό  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  σε *linearly separable* περιοχές ταξινόμησης του προτύπου  $\mathbf{x}$   
**Ταξινόμηση Προτύπων:** Τελική επιλογή κλάσης για δειγματικό σημείο (*pattern*)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m_0}$  σε **2<sup>η</sup> Φάση Υβριδικής Μάθησης (Hybrid Learning)** στο πλησιέστερο σημείο από τα κέντρα βάρους της 1<sup>ης</sup> Φάσης, μέσω επιβλεπόμενης μάθησης και με δίκτυο **feed-forward**



## Δυαδική Ταξινόμηση - Kernel Perceptron

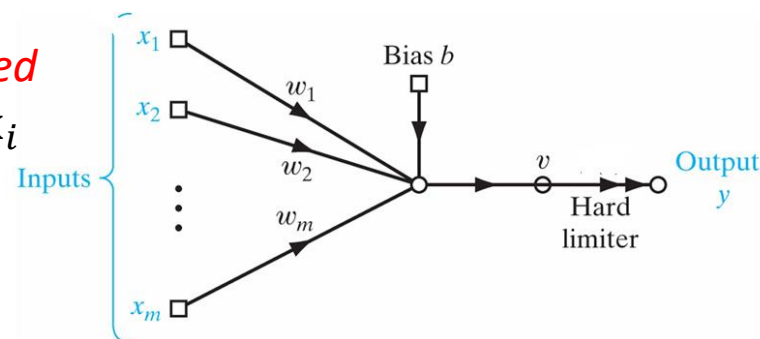
[https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel\\_perceptron](https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_perceptron)

### Γραμμική Δυαδική Ταξινόμηση, Αλγόριθμος Perceptron

$$y = \text{sgn}(\mathbf{w}^T \mathbf{x}) \in \{-1, 1\}$$

**Αλγόριθμος Μάθησης:** Επαναληπτικός προσδιορισμός συναπτικών βαρών  $\mathbf{w}$  με διαδοχική εφαρμογή του *labeled* δείγματος μάθησης  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  με εισόδους  $\mathbf{x}_i$  που οδηγούν σε εξόδους  $y_i = \text{sgn}(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) \in \{-1, 1\}$

$$\mathbf{w} \leftarrow \begin{cases} \mathbf{w} & \text{αν } d_i = y_i \text{ (ορθή επιλογή)} \\ \mathbf{w} + d_i \mathbf{x}_i & \text{αν } d_i \neq y_i \text{ (λάθος επιλογή)} \end{cases}$$



### Μη Γραμμική Δυαδική Ταξινόμηση, Kernel Perceptron

Η *Kernel Machine* αποθηκεύει ένα υποσύνολο από  $n$  σημεία  $\mathbf{x}_i$  διαστάσεως  $m_0$  του δείγματος μάθησης  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$ , ορίζει μετρητή  $\alpha_i$  για ταξινομήσεις  $\mathbf{x}_i \rightarrow y_i \in \{-1, 1\}$  και επιλέγει δυαδική κλάση  $y$  για νέο σημείο  $\mathbf{x}$  με βάση τον κανόνα

$$y = \text{sgn} \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in \{-1, 1\}$$

Ο πυρήνας (*Kernel*)  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in \mathbb{R}$  ορίζεται σαν εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων διαστάσεως  $m_1 \geq m_0$  με στοιχεία μη γραμμικές *hidden functions*:  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)$

**Αλγόριθμος Μάθησης:** Ανάλογη του Αλγορίθμου Perceptron με  $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \alpha_i d_i \mathbf{x}_i$  όπου  $\alpha_i$  μετρητής λανθασμένων επιλογών  $\mathbf{x}_i \rightarrow y_i \neq d_i$

Για κάθε σημείο  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  υπολογίζω  $y_i = \text{sgn}(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i) = \text{sgn} \sum_{j=1}^n \alpha_j d_j k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  και αν  $y_i \neq d_i$  (λάθος επιλογή) αυξάνεται ο μετρητής  $\alpha_i \leftarrow \alpha_i + 1$

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Radial-Basis Function (RBF) Networks

- **Input Layer:** Είσοδος διανυσμάτων  $\mathbf{x}$  με  $m_0$  χαρακτηριστικά (*features*)
- **Hidden Layer:** Για *Δείγμα Μάθησης* με  $N \geq m_0$  στοιχεία (*πρότυπα*), ορίζονται  $N$  κόμβοι επεξεργασίας με *Gaussian*

**Ακτινικές Συναρτήσεις Βάσης - RBF:**

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2\right) \end{aligned}$$

(Gaussian συνάρτηση της απόστασης  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|^2$  του  $\mathbf{x}$  από τα παραδείγματα μάθησης  $\mathbf{x}_j$ , συνήθως με ίσες  $\sigma_j = \sigma$ )

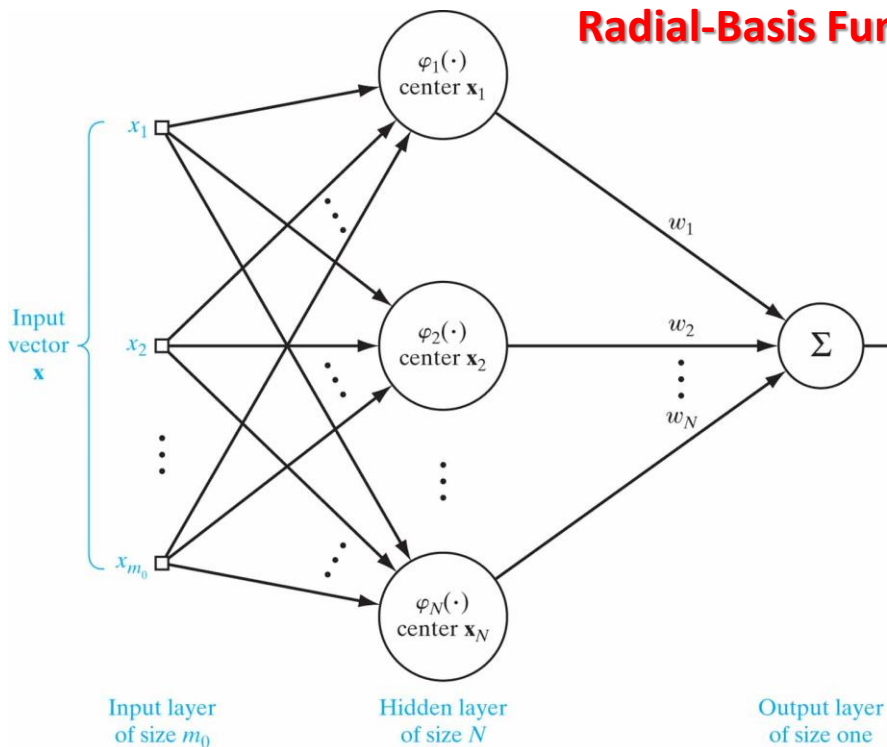
• **Output Layer:** Γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων βάσης  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}) \varphi_2(\mathbf{x}) \dots \varphi_N(\mathbf{x})]^T$

$$y = F(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N w_j \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)$$

Για δυαδική ταξινόμηση  $y \in \{-1, 1\}$  ή  $y \in \{0, 1\}$

### • Training:

- Επίλυση γραμμικού συστήματος  $N$  εξισώσεων  $F(\mathbf{x}_i) = \sum_j w_j \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = d_i$  από τα  $N$  *labeled* στοιχεία  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$  του δείγματος μάθησης με  $N$  αγνώστους  $w_j$
- Οι σχέσεις  $F(\mathbf{x}_i) = d_i, i = 1, 2, \dots, N$  ορίζουν *υπερ-επιφάνεια δυαδικού διαχωρισμού* κλάσεων για το δείγμα μάθησης. Η *γενίκευση* για σημεία με ανακριβή στοιχεία ή νέα δειγματικά σημεία προκύπτει σαν *interpolation* επί της υπερ-επιφανείας διαχωρισμού
- Το σύστημα έχει πάντα λύση για διακριτά σημεία  $\mathbf{x}_i$  (*Θεώρημα Michellis*)



# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Radial-Basis Function (RBF) Network για XOR

(βασισμένο στη παρουσίαση «Υβριδική Μάθηση – RBF», **A. Σταφυλοπάτη**, ΣΗΜΜΥ Ε.Μ.Π.

[http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1080/document/%C4%E9%E1%EB%DD%EE%E5%E9%F2\\_2019-2020/rbf.pdf](http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1080/document/%C4%E9%E1%EB%DD%EE%E5%E9%F2_2019-2020/rbf.pdf))

$$m_0 = 2, N = 4$$

Ακτινικές Συναρτήσεις Βάσης:  $\varphi_j(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_j^2} \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|^2\right)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$

$$\boldsymbol{\mu}_1 = [1, 1], \boldsymbol{\mu}_2 = [0, 0], \boldsymbol{\mu}_3 = [0, 1], \boldsymbol{\mu}_4 = [1, 0]$$

$$y = F(\mathbf{x}) = w_1\varphi_1(\mathbf{x}) + w_2\varphi_2(\mathbf{x}) + w_3\varphi_3(\mathbf{x}) + w_4\varphi_4(\mathbf{x})$$

$\mathbf{x}$	$\varphi_1(\mathbf{x})$	$\varphi_2(\mathbf{x})$	$\varphi_3(\mathbf{x})$	$\varphi_4(\mathbf{x})$	$y$
(1,1)	1	0.1353	0.3678	0.3678	0
(0,0)	0.1353	1	0.3678	0.3678	0
(0,1)	0.3678	0.3678	1	0.1353	1
(1,0)	0.3678	0.3678	0.1353	1	1

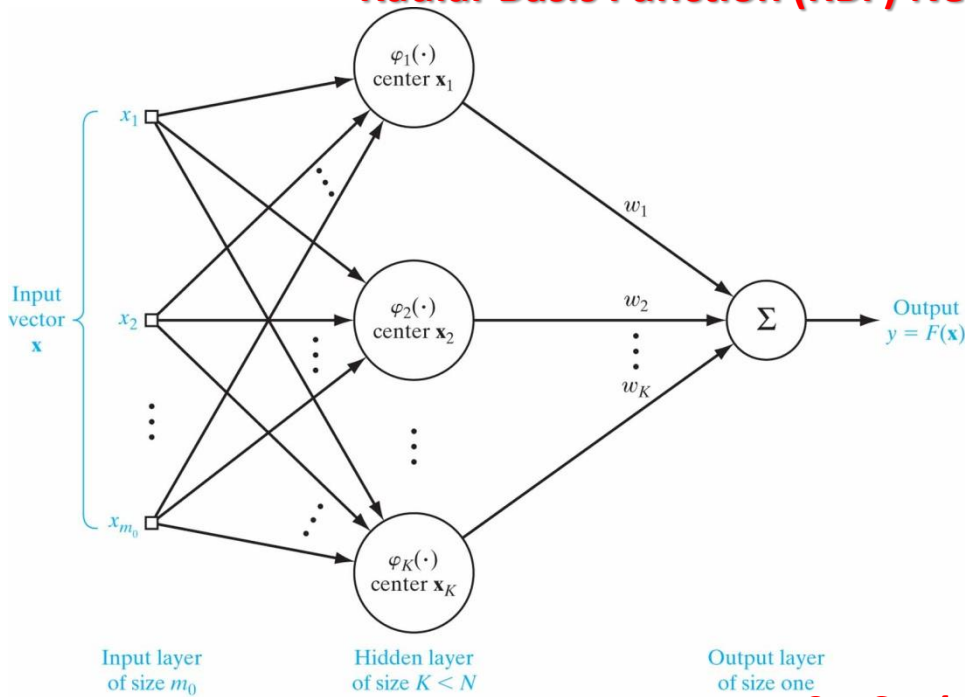
**Αποτέλεσμα**

$$w_1 = w_2 = -0.9843$$

$$w_3 = w_4 = 1.5188$$

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Radial-Basis Function (RBF) Networks – Πρακτική Υλοποίηση



Η ταξινόμηση με δίκτυα RBF απαιτεί μεγάλο αριθμό κρυφών κόμβων  $N$  (ίσων με τον αριθμό των στοιχείων μάθησης) και ακριβείς μετρήσεις των  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}, i = 1, 2, \dots, N$

### Προσεγγιστική Υλοποίηση

Μικρότερος αριθμός κρυφών κόμβων  $K < N$  που ορίζει χώρο  $K$  διαστάσεων:

$$y = F(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K w_j \varphi(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|)$$

### Υβριδική Μάθηση

Προσδιορισμός των Κέντρων  $\mathbf{x}_j$  και Συναπτικών Βαρών  $w_j, j = 1, 2, \dots, K$

- **Input Layer:** Διάνυσμα  $\mathbf{x}$  διαστάσεως  $m_0$  (αριθμός *features*)
- **Hidden Layer:**  $K$  κρυφοί κόμβοι  $\varphi(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|)$  που έχουν κέντρα  $\boldsymbol{\mu}_j$ . Τα  $K$  κέντρα  $\boldsymbol{\mu}_j$  προκύπτουν σαν *cluster heads* των  $\mathbf{x}$  από αλγόριθμο **μη επιβλεπόμενης μάθησης K-Means Clustering** με Ευκλείδειο μέτρο απόστασης  $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|^2$  (ο  $K$  ορίζεται από τον αναλυτή)
- **Output Layer:** Γραμμικός συνδυασμός των  $K$  συναρτήσεων βάσης  $\varphi_j(\mathbf{x})$ :

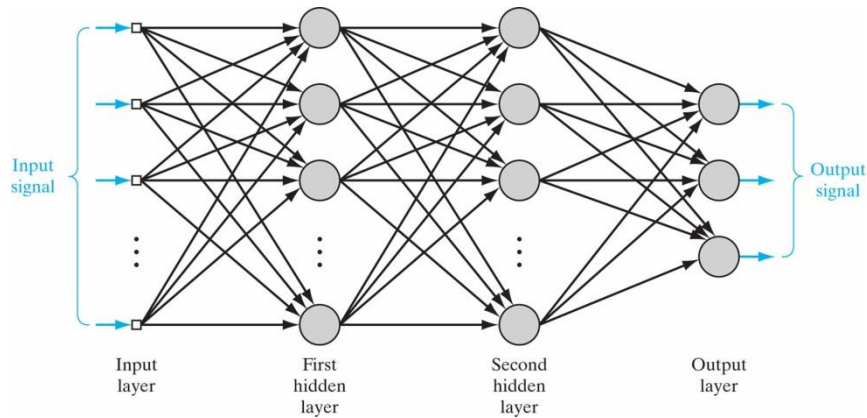
$$y = F(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^K w_j \varphi(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_j\|)$$

Εκτίμηση των  $w_j$  από στοιχεία του δείγματος μάθησης  $\{\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i), d_i\}$  με **επιβλεπόμενη μάθηση** κατά προσέγγιση **ελαχίστων τετραγώνων**:  $N$  εξισώσεις  $d_i = F(\mathbf{x}_i)$ ,  $K$  άγνωστοι  $w_j$  ( $K < N$ )

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

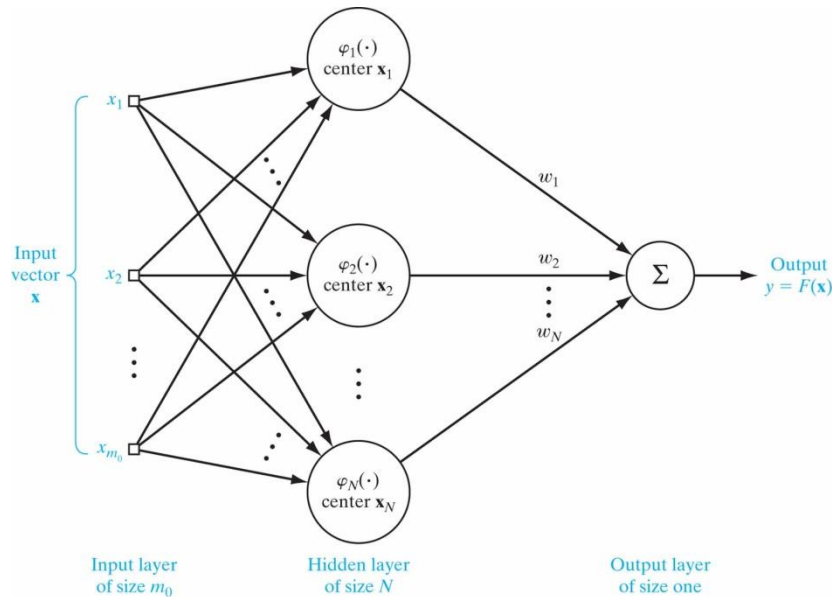
## Multi-layer Perceptron (MLP) vs. RBF

### MLP



- Πολλά επίπεδα κρυφών νευρώνων
- Επιβλεπόμενη Μάθηση (Supervised Learning)
- Batch ή On-line (Stochastic) Learning
- Back-propagation Algorithm
- Μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης
- Βραδεία εκπαίδευση
- Ανοχή σε ανακρίβειες μετρήσεων δειγματικών σημείων

### RBF



- Ένα κρυφό επίπεδο νευρώνων
- Υβριδική Μάθηση (Hybrid Learning)
- Μη γραμμικός μετασχηματισμός διανυσματικών σημείων μέσω Radial-Basis Functions (Gaussian)
- Ευελιξία στη διαχωρισιμότητα περιοχών κατάταξης διανυσματικών σημείων (pattern vectors)
- Γρήγορη εκπαίδευση
- Ευαισθησία σε ανακρίβειες μετρήσεων δειγματικών σημείων

# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Support Vector Machines (SVM) – Γραμμικά Διαχωριζόμενες Περιοχές Ταξινόμησης (1/2)

- Για *labeled* δείγμα μάθησης με στοιχεία  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$ ,  $d_i \in \{-1, +1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  η **SVM** ορίζει βέλτιστες περιοχές δυαδικής ταξινόμησης με τη μέγιστη διαχωριστική ζώνη (περιθώριο διαχωρισμού - *margin of separation*) μεταξύ τους
- Για περιπτώσεις γραμμικά διαχωριζόμενων διανυσματικών στοιχείων  $\mathbf{x}$  (*patterns*) με  $m$  διαστάσεις (*features*) το υπερ-επίπεδο διαχωρισμού ορίζεται από την εξίσωση

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b = 0$$

- Η ταξινόμηση του σημείου μάθησης  $\mathbf{x}_i$  ακολουθεί τον κανόνα:

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \geq 0 \text{ αν } d_i = +1$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b < 0 \text{ αν } d_i = -1$$

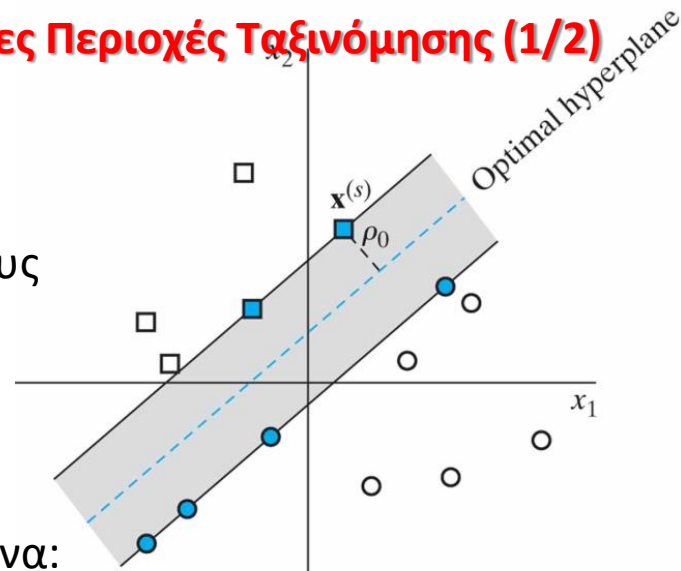
- Η απόσταση του πλησιέστερου σημείου από το υπερ-επίπεδο διαχωρισμού ορίζει το περιθώριο  $\rho$  που πρέπει να μεγιστοποιηθεί για **βέλτιστο διαχωρισμό**:  $\mathbf{w}_o^T \mathbf{x} + b_o = 0$
- Γεωμετρικά προκύπτει πως  $\rho = \frac{2}{\|\mathbf{w}_o\|}$  όπου  $\|\mathbf{w}_o\|$  το Ευκλείδειο μέτρο του διανύσματος  $\mathbf{w}_o$
- Για τα στοιχεία του δείγματος μάθησης  $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$  σε κανονικό υπερ-επίπεδο διαχωρισμού ισχύει:

$$\mathbf{w}_o^T \mathbf{x}_i + b_o \geq 1 \text{ αν } d_i = +1$$

$$\mathbf{w}_o^T \mathbf{x}_i + b_o \leq -1 \text{ αν } d_i = -1$$

- Τα διανύσματα  $\mathbf{x}_i$  για τα οποία ισχύει η ισότητα σε μια από τις δύο ανισότητες είναι τα **Support Vectors** (*Διανύσματα Υποστήριξης*)  $\mathbf{x}_i^S$  στα όρια της διαχωριστικής ζώνης
- Οι ανισότητες ενοποιούνται σαν περιορισμοί (*constraints*) για το δείγμα μάθησης:

$$d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$



## Support Vector Machines (SVM) – Γραμμικά Διαχωριζόμενες Περιοχές Ταξινόμησης (2/2)

(βασισμένο στη παρουσίαση «Μηχανές Διανυσμάτων Υποστήριξης», **Γ. Στάμου**, ΣΗΜΜΥ Ε.Μ.Π.

[http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1078/document/%D5%EB%E9%EA%FC\\_%C4%E9%E1%EB%D%E5%E5%F9%ED\\_2019-2020/NN-SVM-handouts.pdf](http://mycourses.ntua.gr/courses/ECE1078/document/%D5%EB%E9%EA%FC_%C4%E9%E1%EB%D%E5%E5%F9%ED_2019-2020/NN-SVM-handouts.pdf))

### Διατύπωση σαν Πρόβλημα Μη Γραμμικού Προγραμματισμού

**Μεγιστοποίηση** περιθωρίου διαχωρισμού  $\rho = \frac{2}{\|\mathbf{w}_o\|} \Leftrightarrow$  **Ελαχιστοποίηση**  $\|\mathbf{w}_o\|^2 = \mathbf{w}_o^T \mathbf{w}_o$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς για προσδιορισμό των παραμέτρων της SVM (synaptic weights  $\mathbf{w}$  και bias  $b$ ):

$$\min_{\mathbf{w}} \Phi(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} \quad \text{όταν} \quad d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1, i = 1, 2, \dots, N$$

Η συνάρτηση κόστους είναι άθροισμα τετραγώνων και οι περιορισμοί γραμμικοί. Το βέλτιστο  $\mathbf{w}$  μπορεί να προσδιορισθεί με κλασική μέθοδο μη γραμμικού προγραμματισμού, π.χ. με χρήση **Lagrange Multipliers**  $\lambda_i$  για τους περιορισμούς  $d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) \geq 1$

Ορίζω συνάρτηση κόστους  $J(\mathbf{w}, b, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w} - \sum_{i=1}^N \lambda_i [d_i(\mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b) - 1]$

Στο βέλτιστο σημείο και για τα  $N$  στοιχεία μάθησης  $\mathbf{x}_i$  ισχύουν οι συνθήκες **Kuhn-Tucker**:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}} = 0 \rightarrow \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i \mathbf{x}_i$$

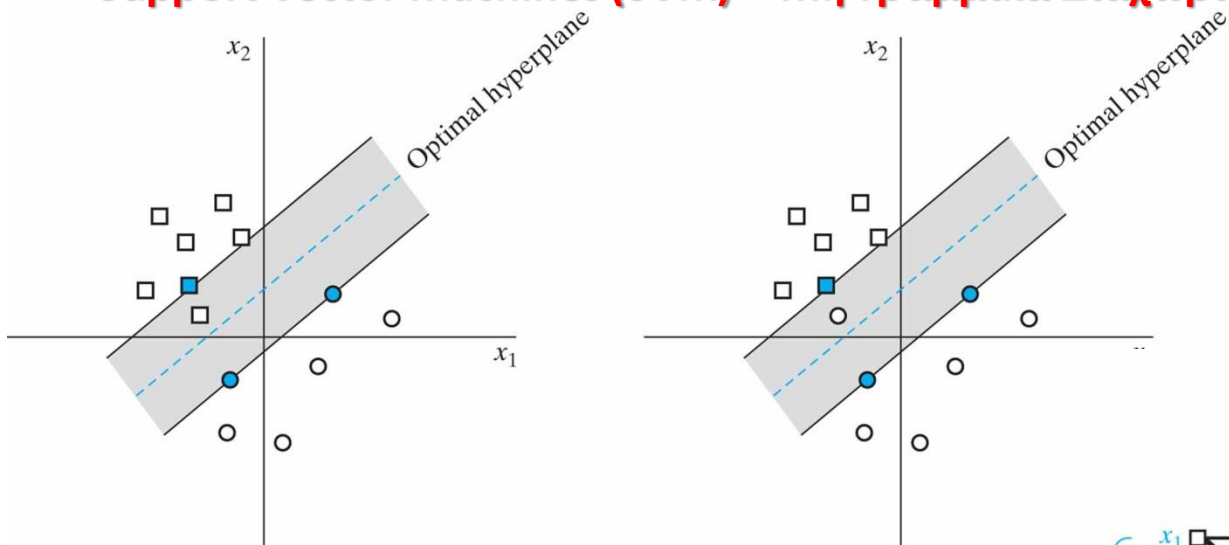
$$\frac{\partial J}{\partial b} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i d_i = 0$$

Τα  $\mathbf{w}, b$  προσδιορίζουν το βέλτιστο υπερ-επίπεδο διαχωρισμού  $\mathbf{w}^T \mathbf{x} + b = 0$

Τα **Support Vectors**  $\mathbf{x}_i^S$  αντιστοιχούν σε  $\lambda_i > 0$ . Τα υπόλοιπα  $\mathbf{x}_i$  σε  $\lambda_i = 0$

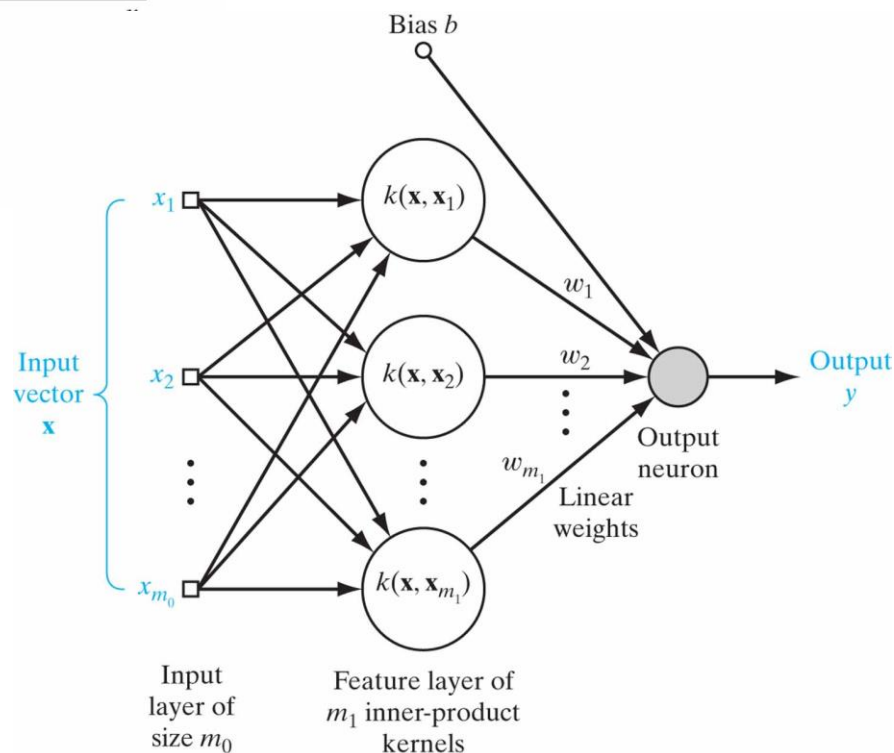
# ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

## Support Vector Machines (SVM) – Μη Γραμμικά Διαχωριζόμενες Περιοχές Ταξινόμησης



### Παραβάσεις Γραμμικής Διαχωρισιμότητας:

- $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$  εντός της διαχωριστικής ζώνης από την σωστή πλευρά του βέλτιστου υπερ-επιπέδου
- $\{\mathbf{x}_i, d_i\}$  εντός της διαχωριστικής ζώνης από την λάθος πλευρά του βέλτιστου υπερ-επιπέδου



### Αρχιτεκτονική SVM με χρήση Δικτύου RBF

Χρήση μεγάλου αριθμού *hidden nodes*  $m_1$  (μικρότερο ή ίσο με τον αριθμό στοιχείων του δείγματος μάθησης  $N$ ) που μετασχηματίζουν μη γραμμικά διαχωρίσιμες περιοχές των διανυσμάτων εισόδου  $\mathbf{x}$  διαστάσεως  $m_0 \ll m_1$  σε γραμμικά διαχωρίσιμες περιοχές