ε.δε.μ^2

ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση - Unsupervised Learning

K-Means Clustering
Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών - Principal Component Analysis (PCA)

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

www.netmode.ntua.gr

(μέσω Webex)

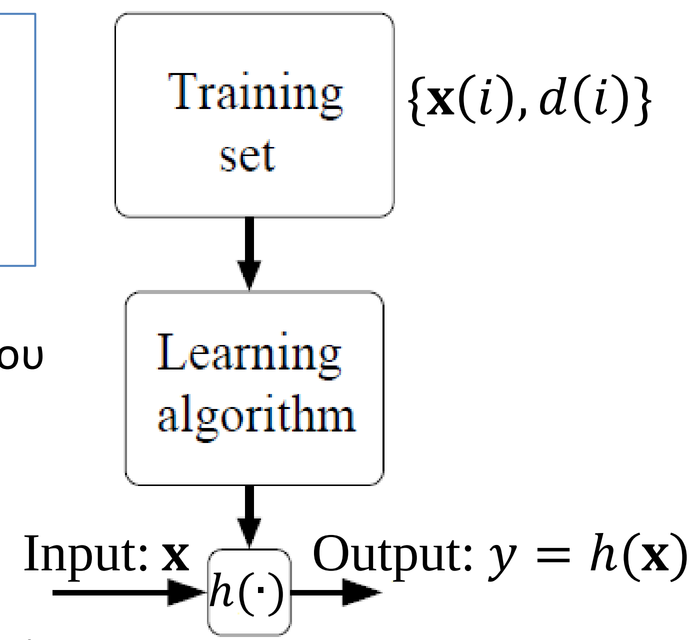
Πέμπτη 11/3/2021

Γενικό Μοντέλο Επιβλεπόμενης Μάθησης - Supervised Learning (*Επανάληψη*)

Βασισμένο στο Andrew Ng, “CS229 Lecture Notes”, Stanford University, Fall 2018

- Στόχος του συστήματος είναι η αντιστοίχηση ενός δειγματικού στοιχείου εισόδου (***input sample point***, ***example***) $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \dots x_m]^{\mathrm{T}}$ σε τιμές εξόδου y που εκτιμούν επιθυμητές (***desired***) τιμές d (π.χ. πρόβλεψη ή ταξινόμηση). Τα στοιχεία x_i είναι αριθμητικές τιμές που κωδικοποιούν m ειδοποιά χαρακτηριστικά (***features***) του δειγματικού στοιχείου $\mathbf{x}$

Ζητείται ο προσδιορισμός της συνάρτησης εισόδου - εξόδου $y = h(\mathbf{x}) \cong d$ που προκύπτει από δείγμα μάθησης (***Training Set***) N ***labeled*** ζευγών $\{\mathbf{x}(i), d(i)\}$, $i = 1,2, \dots, N$ γνωστών σε εξωτερικό εκπαιδευτή (***supervisor***)



- Η σχεδίαση της $h(\cdot)$ βασίζεται σε αλγόριθμο μάθησης, με προσαρμογή της μορφής και των παραμέτρων ενός μοντέλου ώστε να προσεγγίζεται ο στόχος της υπόθεσης

$$d(i) \cong y(i) = h(\mathbf{x}(i))$$

- Αν ο στόχος ικανοποιείται με μικρό αριθμό διακριτών επιλογών της y πρόκειται για πρόβλημα Ταξινόμησης, ***Classification*** (για δύο επιλογές έχουμε δυαδική ταξινόμηση)

- Αν η έξοδος y λαμβάνει συνεχείς τιμές, το πρόβλημα αναφέρεται σαν Παλινδρόμηση, ***Regression***

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση – Unsupervised Learning, Hebbian Learning

- Εκτίμηση *a-priori* πιθανοτήτων $p(\mathbf{x})$ του δειγματικού στοιχείου $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \dots x_m]^{\mathrm{T}}$ με m *features* x_i π.χ. *K-Means Clustering* - επιλογή *Κ* Κέντρων Βάρους Συστοιχιών (*cluster centroids*) και κατανομή σε *clusters* δυσδιάστατων σημείων $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^{\mathrm{T}}$

- Δεν υπάρχει εκ των προτέρων κατηγοροποίηση (*labelling*) δεδομένων. Το σύστημα με βάση *features* δειγματικών στοιχείων $\mathbf{x}$ (π.χ. συντεταγμένες σημείων σε δύο διαστάσεις) ορίζει επιθυμητή έξοδο d και χειρίζεται νέα στοιχεία ως προς αυτή (π.χ. συμμετοχή στο πλησιέστερο *cluster centroid*) μέσω μετασχηματισμού (συνάρτησης) $y = h_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \rightarrow d$ με στατιστικά κριτήρια

- Τα συστήματα με μη επιβλεπόμενη μάθηση βασίζονται σε αυτο-οργάνωση (π.χ. *Self-Organizing Maps - SOM*) και μαθηματικά εργαλεία ανίχνευσης κοινών χαρακτηριστικών (*features*, *patterns*) για την αποτελεσματική επεξεργασία – αποθήκευση – ταξινόμηση δεδομένων χωρίς εξωτερική βοήθεια, π.χ. για επεξεργασία σήματος (*speech – image processing*) και αναγνώριση προτύπων (*pattern recognition*)

Διευκρίνιση: Στατιστική Θεώρηση Δειγματικών Δεδομένων

Ένα δείγμα (*sample*) δεδομένων είναι σύνολο N διανυσματικών στοιχείων $\mathbf{x}$ που επιλέγονται με πιθανότητα $p(\mathbf{x})$ ανάμεσα στα διανύσματα του δειγματικού χώρου. Οι συνιστώσες x_i των διανυσμάτων $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \dots x_m]^{\mathrm{T}}$ κωδικοποιούν τα m χαρακτηριστικά (*features*) τους σαν δειγματικές τιμές (*sample values*) τυχαίων μεταβλητών

Διαμόρφωση Συστάδων μέσω K- Means Clustering

Οργάνωση σε K συστάδες (*clusters*) N δειγματικών στοιχείων $\mathbf{x}(i) = [x_1(i)\ x_2(i) \ldots\ x_m(i)]^{\mathrm{T}}$ με βάση κοινά χαρακτηριστικά από *unlabeled* δείγμα χωρίς δάσκαλο (*unsupervised learning*)

Ορισμοί:

- Encoder C $\;C(i) = j$: Το στοιχείο $\mathbf{x}(i),\ i = 1,2,\ldots,N$ ανήκει στο *cluster* $j = 1,2,\ldots,K$
- Measure of Similarity $d(\mathbf{x}(i), \mathbf{x}(i'))$ π.χ. *Τετραγωνική Ευκλείδεια Απόσταση* $\|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(i')\|^2$
- *Εκτιμώμενο κέντρο βάρους* $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ (*centroid*) του *cluster* $j = 1,2,\ldots,K$ (μέσες Ευκλείδειες αποστάσεις των $\mathbf{x}(i)$ από $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ για τις επιλογές του encoder $C(i) = j$)
- Συνάρτηση Κόστους

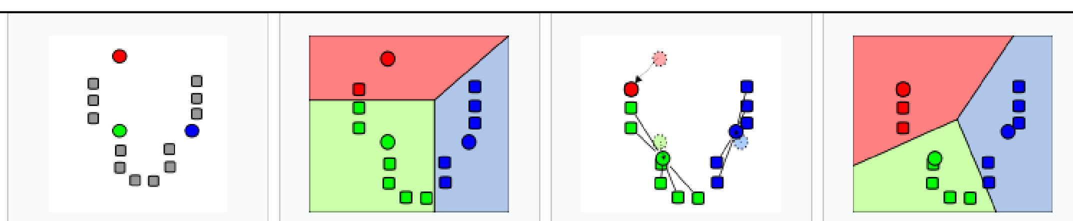
  $$J(C) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}\sum_{C(i)=j}\sum_{C(i')=j}\|\mathbf{x}(i) - \mathbf{x}(i')\|^2 = \sum_{j=1}^{K}\sum_{C(i)=j}\left\|\mathbf{x}(i) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j\right\|^2$$

- Κριτήριο Ελαχιστοποίησης: Διαπορά $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^2 \triangleq \sum_{C(i)=j}\left\|\mathbf{x}(i) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_j\right\|^2,\ \min_{C} J(C) = \min_{C}\sum_{j=1}^{K}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^2$

Σύνοψη αλγορίθμου:

- Ο αλγόριθμος τοποθετεί τα δειγματικά στοιχεία στο πλησιέστερο *centroid*, ανανεώνει τις επιλογές κέντρων βάρους (*centroids*) και συνεχίζει μέχρι τη τελική διαμόρφωση K *clusters*
- Αρχική επιλογή *centroids*: Αυθαίρετες (τυχαίες) τοποθετήσεις K σημείων
- Η εκτέλεση του αλγορίθμου είναι αποτελεσματική αλλά χωρίς εγγύηση βέλτιστης λύσης

Παράδειγμα: $K = 3, N = 12$ (https://en.wikipedia.org/wiki/K-means_clustering)



Αρχικοποίηση *Centroids* | 1^{η} Διαμόρφωση *Clusters* | Προσδιορισμός Νέων *Centroids* | Τελική Πρόταση *Clusters*

Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση: Ανάλυση Κυρίων Συνιστωσών
Principal Components Analysis - PCA

The Curse of Dimensionality:
Σε ένα δειγματικό χώρο δεδομένων $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \dots\ x_m]^T$ η κωδικοποίηση των χαρακτηριστικών του δείγματος μπορεί να απαιτεί μεγάλο αριθμό διακριτών στοιχείων $x_i,\ i = 1,2,\dots,m$. Για καταγραφή με στατιστική επάρκεια όλων των χαρακτηριστικών απαιτείται αριθμός δειγματικών στοιχείων N πολλαπλάσιος του m (π.χ. $N \gg 5m$, https://en.wikipedia.org/wiki/Curse_of_dimensionality)

Reduction of Dimensionality – Principal Components:
Με εφαρμογή *Unsupervised Learning* σε γραμμικό σύστημα με είσοδο $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_m]^T$ μπορεί να μειωθεί ο αριθμός των χαρακτηριστικών (αριθμός συντεταγμένων m) μέσω μετασχηματισμού σε ***Ασυσχέτιστες Κύριες Συνιστώσες*** (*Principal Components*) και έξοδο $\mathbf{y} = [y_1\, y_2\, \dots\ y_l]^T$ με επιλογή των σημαντικότερων συνιστωσών ($l \ll m$ χαρακτηριστικών) με τη μεγαλύτερη αναμενόμενη διασπορά

Αναλογία με ιδιοτιμές (*eigenvalues*) και ιδιοδιανύσματα (*eigenvectors*) στη γραμμική άλγεβρα και σχετικούς αλγόριθμους μετασχηματισμού συνιστωσών σε ορθοκανονικό (*orthonormal*) σύστημα συντεταγμένων

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Orthonormal Transformation σε Principal Components

Ορισμοί Στατιστικής Προσέγγισης της Principal Component Analysis (PCA)

- Θεωρούμε είσοδο από δειγματικά στοιχεία δεδομένων $\mathbf{x} = [x_1\ x_2 \dots\ x_m]^T$ με m χαρακτηριστικά (*features*) κωδικοποιημέα στις συνιστώσες x_i
- Οι συνιστώσες x_i αποτελούν *δειγματικές τιμές* (sample values) *τυχαίων μεταβλητών* X_i που αναφέρονται σε τυχαία διανύσματα $\mathbf{X} = [X_1\ X_2\ \dots\ X_m]^T$ του δειγματικού χώρου. Υποθέτουμε πως $\mathrm{E}[\mathbf{X}] = \mathrm{E}[X_i] = 0$
- Η συμμετρική μήτρα $(m \times m)$ $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\mathbf{X}\,\mathbf{X}^T]$ είναι η μήτρα συσχέτισης (*Correlation Matrix*) των τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{X}$ με ιδιοδιανύσματα (*eignevectors*) $\mathbf{q}_j$ και ιδιοτιμές (*eigenvalues*) λ_j: $\mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j,\ \ j = 1,2,\dots,m$ αριθμημένα κατά φθίνουσα σειρά των ιδιοτιμών λ_j

$$\mathbf{q}_j^T \mathbf{q}_k = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad \text{και} \quad \mathbf{q}_j^T \mathbf{R} \mathbf{q}_k = \begin{cases} \lambda_j, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

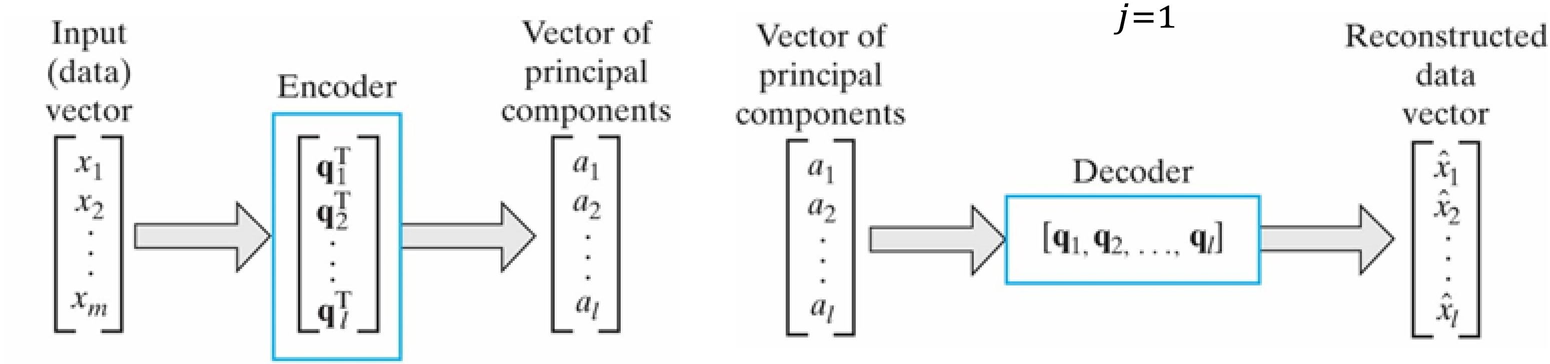
- Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{q}_j$ ορίζουν ορθοκανονικές (*orthonormal*) κύριες (*principal*) κατευθύνσεις που μετασχηματίζουν το στοιχείο $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_m]^T$ με m συντεταγμένες x_i σε $\mathbf{a} = [a_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_m]^T = [\mathbf{x}^T\mathbf{q}_1\ \ \mathbf{x}^T\mathbf{q}_2\ \ \dots\ \ \mathbf{x}^T\mathbf{q}_m]$ με m συντεταγμένες a_i που αποτελούν τις **Κύριες Συνιστώσες** (*Principal Components*). Η αρίθμηση ακολουθεί τη φθίνουσα σειρά των $\lambda_j = \mathbf{q}_j^T \mathbf{R} \mathbf{q}_j = var(A_j) \triangleq \sigma_j^2$ όπου A_j τυχαία μεταβλητή με δειγματική τιμή την κύρια συνιστώσα α_j
- Οι αρχικές συντεταγμένες προκύπτουν μονοσήμαντα από τις Κύριες Συνιστώσες:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{q}_j$$

Orthonormal Transformation σε Principal Components

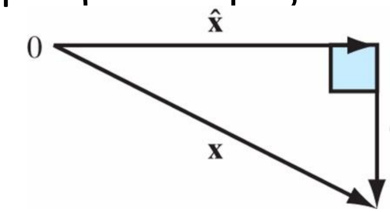
Αν αγνοήσουμε τις κύριες συνιστώσες (*principal components*) με τις μικρότερες διασπορές $\sigma_j^2 = \lambda_j,\ j = l+1, l+2, \ldots, m$ προκύπτει προσεγγιστική εκτίμηση του στοιχείου $\mathbf{x}$ από το στοιχείο $\hat{\mathbf{x}}$ με μικρότερο αριθμό συνιστωσών $l < m$

$$\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1\ \hat{x}_2 \ldots\ \hat{x}_l] = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2 \ldots \mathbf{q}_l][a_1\ a_2 \ldots\ a_l]^T = \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{q}_j \text{ για } l < m$$



Το σφάλμα εκτίμησης $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=l+1}^{m} a_i \mathbf{q}_i$ είναι διάνυσμα ορθογώνιο προς το $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=l+1}^{m} a_i\, \mathbf{q}_j^T \sum_{j=1}^{l} a_j \mathbf{q}_j = 0$$



- Η συνολική διασπορά των m τυχαίων μεταβλητών X_j είναι $\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j$
- Η συνολική διασπορά των l τυχαίων μεταβλητών A_j είναι $\sum_{j=1}^{l} \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$

⇒ Η συνολική διασπορά του σφάλματος $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ είναι $\lambda_{l+1} + \lambda_{l+2} + \cdots + \lambda_m$ που αντιστοιχεί στις κύριες συνιστώσες με τις μικρότερες διακυμάνσεις

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Προσδιορισμός 1ης Κύριας Συνιστώσας από Γραμμικό Νευρώνα με Μάθηση Hebbian (1/2)
(First Principal Component via Hebbian-based Maximum Eigenfilter)

Αξίωμα του Hebbs: Αν τα σήματα στα άκρα μιας νευρωνικής σύναψης i ενεργοποιούνται ταυτόχρονα σε μια χρονική στιγμή που ορίζεται από το βήμα n, το συναπτικό της βάρος $w_i(n)$ ενισχύεται. Αλλιώς φθίνει προς μηδενισμό (*παραλλαγή από αρχικό αξίωμα για μάθηση με όρους νευροψυχολογίας*)
Αρχή Ανταγωνιστικότητας: Οι πιο ενεργές συνάψεις τείνουν να μηδενίσουν τις λιγότερο ενεργές

Αυτοοργανωμένη (Self-organized) Προσέγγιση Principal Component Analysis (PCA):
Νευρωνικό Δίκτυο Υπολογισμού *First Principal Component* Δεδομένων με m Features

$$y(n) = \sum_{i=1}^{m} w_i(n) x_i(n) \text{ στην επανάληψη } n$$

Τα βάρη αυξάνονται στην επανάληψη $n \to n+1$ αν $y(n)x_i(n) > 0$ (*αξίωμα Hebbs*)

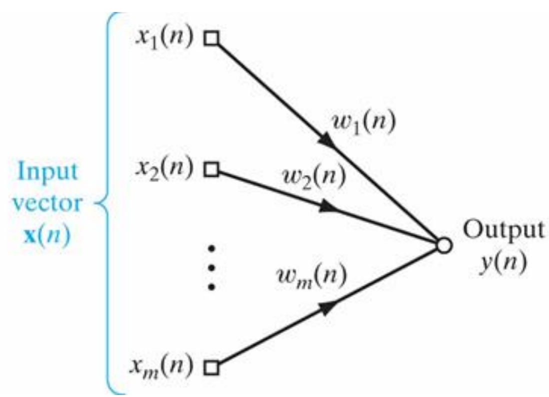
$$w_i(n+1) = w_i(n) + \eta y(n) x_i(n), \quad i = 1,2,\dots,m \quad \text{όπου η learning parameter}$$

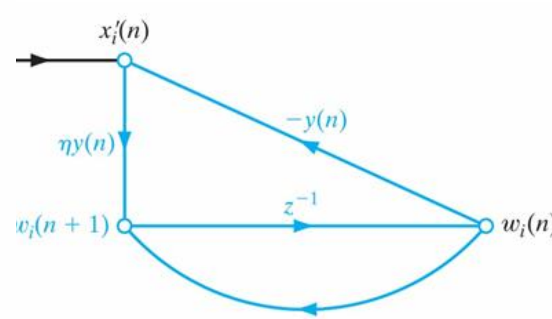
Απαιτείται **Normalization** για ευστάθεια. Με βάση την **Αρχή της Ανταγωνιστικότητας** διαιρούμε σε κάθε βήμα με το εκτόπισμα των $w_k(n)$ που μειώνουν την αύξηση εις βάρος τους:

$$w_i(n+1) = \frac{w_i(n) + \eta y(n) x_i(n)}{\left(\sum_{k=1}^{m} [w_k(n) + \eta y(n) x_k(n)]^2\right)^{1/2}} \cong w_i(n) + \eta y(n)[x_i(n) - y(n) w_i(n)]$$

Η θετική ανάδραση $y(n)x_i(n)$ που προκαλεί αστάθεια αντισταθμίζεται από την $-y(n)w_i(n)$:

$$w_i(n+1) = w_i(n) + \eta y(n) x_i'(n)$$
$$x_i'(n) = x_i(n) - y(n) w_i(n)$$





Προσδιορισμός 1ης Κύριας Συνιστώσας από Γραμμικό Νευρώνα με Μάθηση Hebbian (2/2)
(First Principal Component via Hebbian-based Maximum Eigenfilter)

Ζητήματα Σύγκλισης

Διανυσματικοί ορισμοί
$\mathbf{x}(n) = [x_1(n)\ x_2(n)\ \ldots\ x_m(n)]^T$
$\mathbf{w}(n) = [w_1(n)\ w_2(n)\ \ldots\ w_m(n)]^T$

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n),\ \ \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta y(n)[\mathbf{x}(n) - y(n)\mathbf{w}(n)] \Rightarrow$$

Αλγόριθμος αυτό-οργανωμένης μη επιβλεπόμενης μάθησης:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}^T(n)(\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n))\mathbf{w}(n)\mathbf{w}(n)]$$

- Οι όροι $\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)$ αποτελούν μια στιγμιαία υλοποίηση της μήτρας συσχέτισης $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\mathbf{X}\,\mathbf{X}^T]$ χωρίς μέσους όρους και οδηγούν προς την ανάλυση της σύγκλισης του αλγορίθμου μέσω μη γραμμικής στοχαστικής εξίσωσης διαφορών (*εκτός ορίων του μαθήματος*)

- Δεν υπάρχει εξωτερική επιρροή στον αλγόριθμο λόγω της μη επιβλεπόμενης (αυτό-οργανωμένης, self-organized) φύσης του πλην του a-priori καθορισμού της παραμέτρου μάθησης η

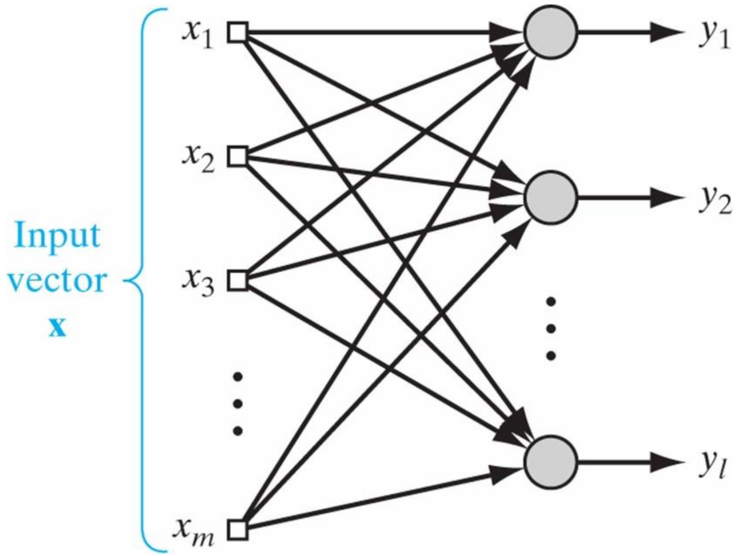
Προσδιορισμός l Κυρίων Συνιστωσών από Μονοστρωματικό Νευρώνα Hebbian (1/3) (Hebbian-based Principal-Component Analysis)

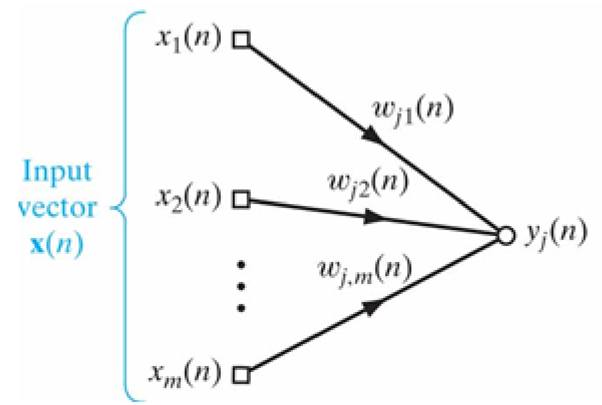
Γενίκευση του Hebbian-based maximum Eigenfilter: Γραμμικό Feedforward Νευρωνικό Δίκτυο ενός επιπέδου με l νευρώνες για προσδιορισμό των l σημαντικών Principal Components από Δεδομένα Διαστάσεων m, $l < m$:

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \qquad j = 1,2,\ldots,l$$

Τα βάρη $w_{ji}(n)$ από στοιχείο εισόδου $x_i(n)$, $i = 1,2,\ldots,m$ προς την j κύρια συνιστώσα $y_j(n)$, $j = 1,2,\ldots,l$ διαφοροποιούνται στην επανάληψη $n \to n+1$ κατά $\Delta w_{ji}(n)$:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \left[y_j(n) x_i(n) - y_j(n) \sum_{k=1}^{j} w_{ki}(n) y_k(n) \right], \qquad j = 1,2,\ldots,l \text{ και } i = 1,2,\ldots,m$$





Προσδιορισμός l Κυρίων Συνιστωσών από Μονοστρωματικό Νευρώνα Hebbian (2/3) (Hebbian-based Principal-Component Analysis)

Γενικευμένος Αλγόριθμος του Hebbs – Generalized Hebbian Algorithm (GHA)

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta y_j(n)\left[x_i'(n) - w_{ji}(n)y_j(n)\right], \qquad j = 1,2,\dots,l \ \text{και} \ i = 1,2,\dots,m$$

$$x_i'(n) = x_i(n) - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ki}(n)y_k(n)$$

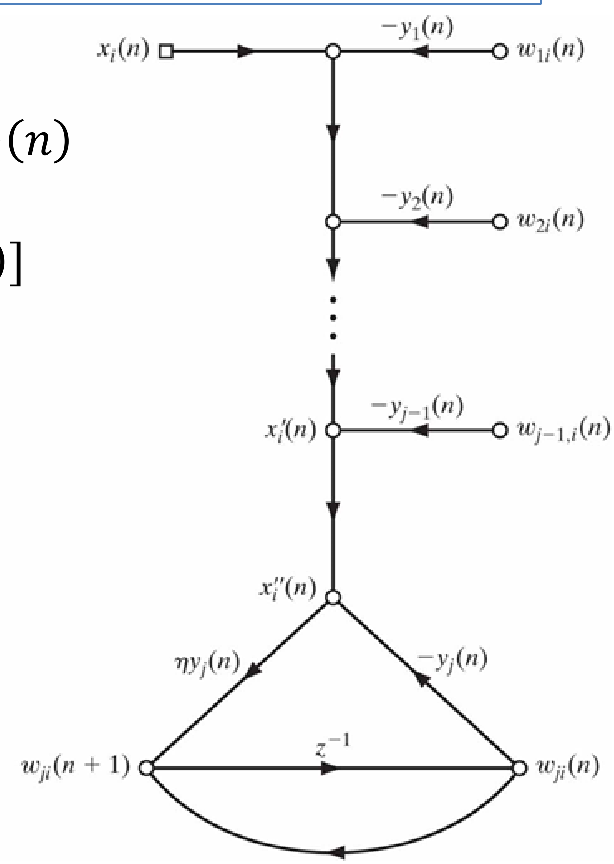
$\Delta w_{ji}(n) = \eta y_j(n)x_i''(n)$ όπου $x_i''(n) = x_i'(n) - w_{ji}(n)y_j(n)$

$w_{ji}(n+1) = w_{ji}(n) + \Delta w_{ji}(n), w_{ji}(n) = z^{-1}[w_{ji}(n+1)]$

Διανυσματική Μορφή:

$\Delta \mathbf{w}_j(n) = \eta y_j(n)\mathbf{x}_i'(n) - \eta y_j^2(n)\mathbf{w}_j(n), j = 1,2,\dots,l$

όπου $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{k=1}^{j-1}\mathbf{w}_k(n)y_k(n)$



Προσδιορισμός l Κυρίων Συνιστωσών από Μονοστρωματικό Νευρώνα Hebbian (3/3) (Hebbian-based Principal-Component Analysis)

$$\boxed{\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{w}_k(n) y_k(n), \qquad j = 1,2,\dots,l}$$

Για $\boldsymbol{j = 1}$: $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n)$

Προσδιορισμός 1ης κύριας συνιστώσας $y_1(n)$

Για $\boldsymbol{j = 2}$: $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_1(n) y_1(n)$

Προσδιορισμός 2ης συνιστώσας $y_2(n)$ σαν 1η συνιστώσα μετά από αφαίρεση της ήδη υπολογισθείσας $y_1(n)$

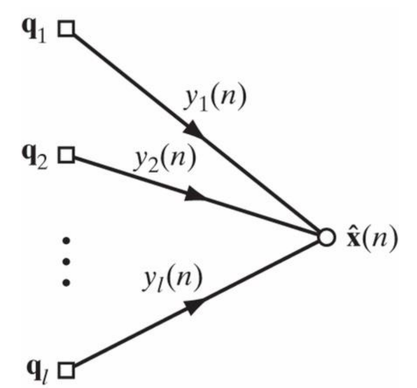
Για $\boldsymbol{j = 3}$: $\mathbf{x}'(n) = \mathbf{x}(n) - \mathbf{w}_1(n) y_1(n) - \mathbf{w}_2(n) y_2(n)$

Προσδιορισμός 3ης συνιστώσας $y_3(n)$ σαν 1η συνιστώσα μετά από αφαίρεση των ήδη υπολογισθείσας $y_1(n)$ και $y_2(n)$

.....

Οι l πιο σημαντικές κύριες συνιστώσες αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{q}_k$ της μήτρας συσχέτισης $\mathbf{R} = \mathrm{E}[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$, $k = 1,2,\dots,l$ αριθμημένες κατά τη φθίνουσα σειρά των ιδιοτιμών $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_l$ και δίνουν την εκτίμηση $\hat{\mathbf{x}}(n)$ με l χαρακτηριστικά του δειγματικού στοιχείου $\mathbf{x}(n)$ με $m > l$

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{k=1}^{l} y_k(n) \mathbf{q}_k \text{ για } l < m$$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εφαρμογή PCA μέσω Generalized Hebbian Algortihm (GHA) στη Κωδικοποίηση Εικόνας (1/2)

- Αρχική Εικόνα (Δείγμα) **Lena**: 256×256 pixels, 256 gray levels στην ***1η εικόνα***
- Μάθηση μέσω $N = 2000$ σκαναρισμένων εικόνων, χωρισμένων σε 1024 μη επικαλυπτόμενα τμήματα (***Blocks***) μεγέθους 8×8 pixels: $m = 64$ features/block
- Το κάθε block ορίζει δειγματικό στοιχείο εισόδου σαν διάνυσμα από m features (pixels) κωδικοποιημένων σε 256 gray levels:

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n)\ x_2(n) \ldots x_m(n)]^T \qquad n = 1,2,\ldots,N$$

- Το δείγμα τροφοδοτεί ***Μονοστρωματικό Linear Feedforward Δίκτυο*** με $l = 8$ Νευρώνες εξόδου
- Το σύστημα συγκλίνει σε $m \times l = 64 \times 8$ συναπτικά βάρη $w_{ji}(n)$ και απολήγει σε 8 εξόδους (κυριότερες συνιστώσες, ***Significant Principal Components***):

$$y_j(n) = \sum_{i=1}^{m} w_{ji}(n) x_i(n), \qquad j = 1,2,\ldots,l$$

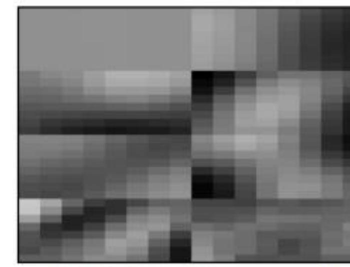
- Ρυθμός μάθησης (***Learning Rate***): $\eta = 10^{-4}$
- Τα βάρη (***weights***) μετά τη σύγκλιση παρίστανται στην ***2η εικόνα*** με $4 \times 2 = 8$ περιοχές (***masks***), 64 τμήματα/mask, σύνολο $64 \times 8 = 1024$ τμήματα που απεικονίζουν την συνεισφορά των 64 χαρακτηριστικών του δείγματος εισόδου στις 8 εξόδους. Το άσπρο χρώμα υποδηλώνει θετική συνεισφορά ενός χαρακτηριστικού, το μαύρο αρνητική και το γκρι μηδενική
- Στη ***3η εικόνα*** παρουσιάζεται ανασύσταση της αρχικής με τη συμμετοχή μόνο των $l = 8$ κυριότερων συνιστωσών της (***l Principal Components***) χωρίς κβαντισμό

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \sum_{k=1}^{l} y_k(n)\mathbf{q}_k\,, \quad \mathbf{q}_k = \lim_{n} \mathbf{w}_k(n)\,, \qquad \mathbf{w}_k(n) = [w_{k1}(n)\ w_{k2}(n) \ldots\ w_{km}(n)]^T$$

- Η ***4η εικόνα*** αποτελεί συμπίεση της ***3ης εικόνας*** με κβαντισμένες τιμές των βαρών ανάλογα με το λογάριθμο της διασποράς τους ($\sim$0.53 bits/pixel)

Original Image

Weights



Using First 8 Components

11 to 1 compression

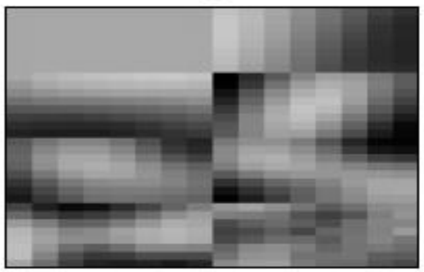
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Εφαρμογή PCA μέσω Generalized Hebbian Algortihm (GHA) στη Κωδικοποίηση Εικόνας (2/2)

- Αρχική Εικόνα (**Peppers**): 256 × 256 pixels, 256 gray levels στην ***πάνω εικόνα***

Original Image

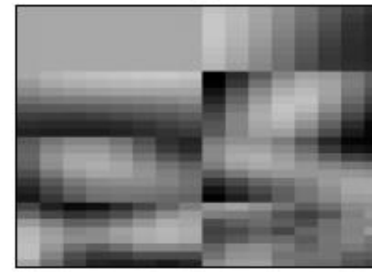
Weights



Using First 8 Components

12 to 1 compression μέσω κβαντισμού βαρών των 8 κυριοτέρων συνιστωσών, με βάρη όπως προσδιορίστηκαν για την εικόνα **Peppers**

Weights



12 to 1 compression μέσω κβαντισμού βαρών των 8 κυριοτέρων συνιστωσών, με βάρη όπως προσδιορίστηκαν για την εικόνα **Lena** αλλά εφαρμόστηκαν στην εικόνα **Peppers** (***GENERALIZATION*** **!?**)

Weights