ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems
Ανάλυση Ουράς Αναμονής M/G/1

Αρχές Ανάλυσης Ουράς M/G/1
Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)
Τύποι Pollaczeck - Khinchin (P-K) για Ουρές M/G/1
Μέσες Τιμές Επίδοσης M/G/1

Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

5/6/2019

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (2/2) *(επανάληψη)*
ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

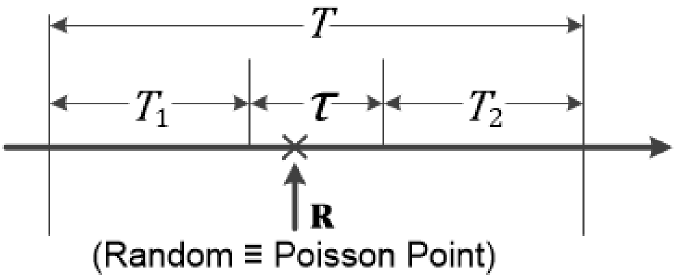
- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(A|n=k)\mathrm{P}(n=k)$$

Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$\mathrm{P}(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(Y|X=x) f_X\, dx\,, \qquad \mathrm{E}(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(Y|X=x) f_X\, dx = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec



Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$\mathrm{P}_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0,1,2,3,\cdots,\ \mathrm{E}_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$

Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson $\mathbf{R}$ στο T με πιθανότητα $\mathrm{P}_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$\mathrm{P}\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [\mathrm{P}_0(T_1) \times \mathrm{P}_1(\tau) \times \mathrm{P}_0(T_2)]/\mathrm{P}_1(T) = \frac{\lambda\tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

Οι αφίξεις Poisson έχουν τη συμπεριφορά τυχαίων αφίξεων **(Poisson Arrivals ~ Random Arrivals)**

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages): Η **εργοδική** κατανομή (και ο μέσος όρος) της κατάστασης S ουράς **M/G/N/K** (εφόσον υπάρχει) εκτιμάται σαν ο μακροχρόνιος λόγος του συνολικού χρόνου τ_S που η κατάσταση έχει την συγκεκριμένη τιμή S προς το συνολικό διάστημα παρατήρησης T. **Οι εκτιμήσεις αυτές μπορεί να προκύψουν από καταγραφή της κατάστασης σε χρονικά σημεία αφίξεων Poisson με ενιαίο ρυθμό λ**:

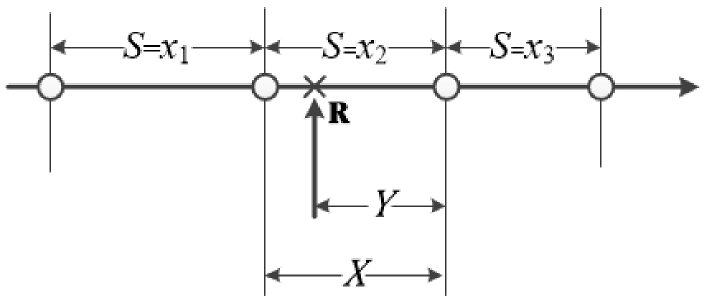
$$\mathrm{P}\{n(t) = S\} = \lim_{T\to\infty} \frac{\tau_S}{T} = \lim_{A\to\infty} \frac{A_S}{A} \cong \frac{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson όταν } n(t) = S, \text{στο συνολικό διάστημα } \tau_S}{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson στο συνολικό διάστημα } T}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΣΗΣ *(επανάληψη)*

Renewal Theory: Basic Definitions

- Στατιστικά Μοντέλα Χρόνου Ζωής (**Life-Time**), Αποτυχίας (**Failure-Times**), Αποκατάστασης (**Repair-Times**)
- Βασική παραδοχή: Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών Σημείων Ανανέωσης (**renewals** που ορίζουν το Χρόνο Ζωής) είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές S με τιμές $x \geq 0$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την ίδια κατανομή $F_S(x)$ (**i.i.d. - independent & identically distributed random variables**), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_S(x)$, μέση τιμή $\mathrm{E}(S)$ και διασπορά $\sigma_S^2 = \mathrm{E}(S^2) - [\mathrm{E}(S)]^2$:

$$\mathrm{P}\{S \in (x-dx, x)\} = f_S(x)dx, F_S(x) = \mathrm{P}(S \leq x) = \int_{t=0}^{x} f_S(t)dt,\ \ \mathrm{E}(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt,\ \ \mathrm{E}(S^2) = \int_{t=0}^{\infty} t^2 f_S(t)dt$$



- Ένας άσχετος παρατηρητής του συστήματος σε τυχαίο χρονικό σημείο $\mathbf{R}$ (**Random Point** που σύμφωνα με την ιδιότητα **PASTA** ισοδυναμεί με τυχαία άφιξη **Poisson**) έχει πιθανότητα να βρεθεί σε διάστημα X με προτίμηση ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος x. Η απόσταση Y από το σημείο αυτό μέχρι το επόμενο renewal αποτελεί τον Υπολειπόμενο Χρόνο Ζωής (**Residual Life**)
- **Renewal Paradox:** Η τυχαία μεταβλητή X (***το μέγεθος του διαστήματος τυχαίας επιλογής***) έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ διαφορετική από την $f_S(x)$

$\mathrm{P}\{\mathbf{R} \in x \,|\, S{=}x\} = \mathrm{K} \cdot x$ (***τυχαία επιλογή ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος*** x)

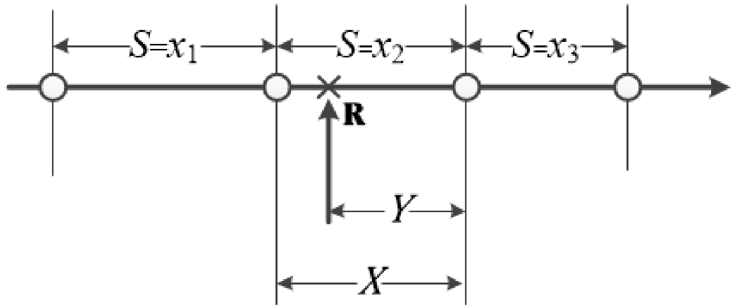
$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{P}\{\mathbf{R} \in t | S = t\} f_S(t)dt = \int_{t=0}^{x} \mathrm{K} \cdot t \cdot f_S(t)dt$$

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \mathrm{K} \cdot x \cdot f_S(x)$, $\int_{x=0}^{\infty} f_X(x)dx = 1 = \mathrm{K} \cdot \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x)dx \Rightarrow \mathrm{K} = 1/\mathrm{E}(S)$ και τελικά

$$\boxed{f_X(x) = x f_S(x)/\mathrm{E}(S),\ \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(S^2)/\mathrm{E}(S)}$$

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ *(επανάληψη)*

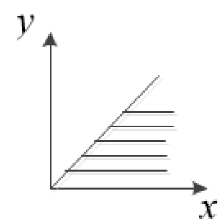
Residual Life & Renewal Paradox



- Επιλογή διαστήματος $X = x$ από παρατηρητή που εμφανίζεται σε σημείο Poisson **R**: $f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{\mathrm{E}(S)}$
- Ο Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής είναι τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$
- $\mathrm{P}\{Y \in (y - dy, y) \,|\, X{=}x\} = \frac{\mathrm{P}\{\mathbf{R} \in dy\}}{\mathrm{P}\{\mathbf{R} \in x\}} = \frac{\mathrm{K} \cdot dy}{\mathrm{K} \cdot x} = dy/x$
  και από τον τύπο της συνολικής πιθανότητας

$$\mathrm{P}\{Y \in (y - dy, y)\} = f_Y(y)dy = \int_{x=y}^{\infty} \frac{dy}{x} f_X(x)dx = \int_{x=y}^{\infty} \frac{f_S(x)}{\mathrm{E}(S)} dy\, dx = \frac{dy}{\mathrm{E}(S)} \int_{x=y}^{\infty} f_S(x)\, dx = \frac{1 - F_S(y)}{\mathrm{E}(S)} dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1 - F_S(y)}{\mathrm{E}(S)}$$



- Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (**Mean Residual Life**):

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{y=0}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{y=0}^{\infty} y \frac{1 - F_S(y)}{\mathrm{E}(S)} dy = \frac{1}{\mathrm{E}(S)} \int_{y=0}^{\infty} \left\{ y \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx \right\} dy$$

$$= \frac{1}{\mathrm{E}(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \left\{ \int_{y=0}^{x} y\, dy \right\} dx = \frac{1}{\mathrm{E}(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x)\, \frac{x^2}{2} dx = \frac{\mathrm{E}(S^2)}{2\mathrm{E}(S)} = \frac{{\sigma_S}^2 + [\mathrm{E}(S)]^2}{2\mathrm{E}(S)}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(Y) = \frac{\mathrm{E}(S^2)}{2\mathrm{E}(S)} = \frac{{\sigma_S}^2 + [\mathrm{E}(S)]^2}{2\mathrm{E}(S)} \geq \frac{\mathrm{E}(S)}{2}}$$

Renewal Paradox: Τυχαία ενδιάμεση παρατήρηση R «προτιμά» κατά μέσο όρο μεγάλα διαστήματα S

- Για **σταθερά** διαστήματα S: $\mathrm{E}(S) = S = 1/\mu$, ${\sigma_S}^2 = 0$, $\mathrm{E}(Y) = S/2 = 1/(2\mu)$ και η μέση τιμή του «προτιμώμενου» διαστήματος είναι $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(S)$ (***αναμενόμενο***, χωρίς προκαταλήψεις λόγω απολύτως προβλέψιμου S)
- Για **εκθετικά** διαστήματα S: $\mathrm{E}(S) = 1/\mu$, ${\sigma_S}^2 = 1/\mu^2$, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(S) = 1/\mu$ (ιδιότητα ***έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής***) και $\mathrm{E}(X) = 2\mathrm{E}(S) = 2/\mu$ (***διπλάσιο της μέσης τιμής*** $\mathrm{E}(S)$ με προκατάληψη λόγω απρόβλεπτου S)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ & ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Moment Generating Functions - MGF *(επανάληψη)*

Διακριτές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές n με τιμές k = 0, 1, 2,… και πιθανότητες $p_k = \mathrm{P}(n = k)$

- Ορίζουμε την **Ροπογεννήτρια Συνάρτηση** (MGF) σαν τον μετασχηματισμό z

  $\mathbf{G}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, z^k, |z| \leq 1,$
- Για $|z|$=1 , $\mathbf{G}_n(1) = 1$ και οι παράγωγοί της MGF ως προς z δίνουν τις ροπές της n:

  $\mathbf{G}_n(1)' = \mathrm{E}(n)$, $\mathbf{G}_n(1)^{(m)} = \mathrm{E}(n^m)$

Παράδειγμα: Αφίξεις Poisson k με ρυθμό λ σε διάστημα t με πιθανότητες $\mathrm{P}_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0,1,2,3,\cdots$

$$\mathbf{G}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k(t)\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/k! = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$\mathbf{G}_n(1) = 1, \mathbf{G}_n(1)' = \mathrm{E}(n) = \lambda t, \mathbf{G}_n(1)'' = \mathrm{E}(n^2) = \lambda t + (\lambda t)^2, \sigma_n^2 = \mathrm{E}(n^2) - [E(n)]^2 = \lambda t$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X με τιμές $t \geq 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$

$$\mathrm{P}\{X \in (t - \Delta t, t)\} = f_X(t)\Delta t, \qquad F_X(t) = \mathrm{P}(X \leq t) = \int_{\tau=0}^{t} f_X(\tau)d\tau$$

- Ορίζουμε τον μετασχηματισμό ***Laplace*** $\mathbf{F}_X(p)$ της $f_X(t)$

  $\mathbf{F}_X(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f_X(t)dt$
- Για $p = 0$ έχουμε αντίστοιχα $\boldsymbol{F}_X(0) = 1$ και οι παράγωγοι ως προς p για $p = 0$ δίνουν τις ροπές της X:

  $\mathbf{F}_X(0)' = -\mathrm{E}(X)$, $\mathbf{F}_X(0)^{(m)} = (-1)^{\mathrm{m}}\mathrm{E}(X^m)$

Παράδειγμα: Εκθετική μεταβλητή X με μέσο όρο $1/\mu$, $f_X(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$$\mathbf{F}_X(p) = \mu/(\mu + p)$$

$$\mathbf{F}_X(0) = 1, \ \mathbf{F}_X(p)' = -\mu/(\mu + p)^2, \ \mathrm{E}(X) = -\mathbf{F}_X(0)' = 1/\mu, \ \mathbf{F}_X(p)'' = 2\mu/(\mu + p)^3, \mathrm{E}(X^2) = \mathbf{F}_X(0)'' = 2/\mu^2$$

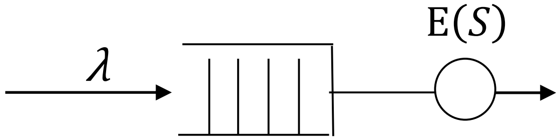
Παράδειγμα: X με σταθερή τιμή $1/\mu$, $f_X(t) = \delta(t - 1/\mu)$

$$\mathbf{F}_X(p) = e^{-p/\mu}, \ \mathbf{F}_X(0) = 1, \mathbf{F}_X(p)' = -(1/\mu)e^{-p/\mu}, \mathrm{E}(X) = -\mathbf{F}_X(0)' = 1/\mu$$

$$\mathbf{F}_X(p)'' = 1/\mu^2 e^{-p/\mu}, \ \mathrm{E}(X^2) = \mathbf{F}_X(0)'' = 1/\mu^2, \ \sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 0$$

- ***Άθροισμα ανεξαρτήτων*** τυχαίων μεταβλητών $\mathbf{F}_{X+Y}(p) = \mathbf{F}_X(p) \cdot \mathbf{F}_Y(p)$

ΑΡΧΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΥΡΑΣ M/G/1 ΣΕ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



- Αφίξεις **Poisson**: λ πελάτες/sec
- Ένας Εξυπηρετητής με χρόνους εξυπηρέτησης S **i.i.d** με πυκνότητα πιθανότητας $f_S(t), t \geq 0$
  - $\mathrm{P}\{S \in (t - \Delta t, t)\} = f_S(t)\Delta t,\ \ F_S(t) = \mathrm{P}(S \leq t) = \int_{\tau=0}^{t} f_S(\tau)d\tau$
  - $\mathrm{E}(S) = \int_{t=0}^{\infty} t\, f_S(t)dt,\ \mathrm{E}(S^m) = \int_{t=0}^{\infty} t^m\, f_S(t)dt,\ \sigma_S^2 = \mathrm{E}(S^2) - [\mathrm{E}(S)]^2$
  - Άπειρο μήκος ουράς
  - Για ισορροπία πρέπει το σύστημα να αδειάζει άπειρες φορές, ή σε χρονικό ορίζοντα $\mathrm{T} \to \infty$ να υπάρχουν αφίξεις Poisson σε χρονικά διαστήματα συνολικής διάρκειας $\mathrm{T}_0 > 0$ που να το βρίσκουν άδειο: Αν ορίσουμε την **εργοδική πιθανότητα** $P_0 \triangleq \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_0}{\mathrm{T}}$, πρέπει $P_0 = 1 - \lambda \cdot \mathrm{E}(S) > 0$ (**PASTA**) ή $\rho \triangleq \lambda \cdot \mathrm{E}(S) < 1$ Erlang
- Η κατάσταση της ουράς σε τυχαία χρονική στιγμή παρατήρησης ή αφίξεως Poisson (από ιδιότητα **PASTA**) δίνεται πλήρως από το ζεύγος (i, r) όπου:
  - i : Αριθμός πελατών στο σύστημα
  - r : Υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη στον εξυπηρετητή κατά τη τυχαία παρατήρηση, αν υπάρχει πελάτης στον εξυπηρετητή με πιθανότητα $1 - P_0 = \rho = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathrm{E}(S) < 1$
- Για τον υπολογισμό **εργοδικών πιθανοτήτων** του αριθμού πελατών $P_i \triangleq \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_i}{\mathrm{T}}$ απαιτείται υπολογισμός των χρονοσταθερών στάσιμων (**stationary**) πιθανοτήτων των κατάστάσεων $P(i, r)$ σε τυχαία σημεία παρατήρησης (ή αφίξεων Poisson) και ολοκλήρωσή τους ως προς την συνθήκη r
- Απλούστερος τρόπος: Υπολογισμός των στάσιμων (**stationary**) πιθανοτήτων $\pi(i)$ σαν όριο της σχετικής συχνότητας παρουσίας i πελατών σε **Ενσωματωμένα Σημεία** (**Embedded Points**) στο χρόνο που ορίζεται **αμέσως μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη**, οπότε με βεβαιότητα $r = 0$
- Η σχετική συχνότητα πελατών $\mathrm{P}(i)$ μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη ισούται με την σχετική συχνότητα πελατών που βλέπουν νέες αφίξεις Poisson στο σύστημα M/G/1 και λόγω **PASTA** δίνει τις **εργοδικές πιθανότητες**

$$P_i \triangleq \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathbf{T}_i}{\mathrm{T}} = \pi(i) \ \text{ και } P_0 = \pi(0) = 1 - \rho = 1 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathrm{E}(S)$$

ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ MARKOV ΓΙΑ ΟΥΡΑ M/G/1 (1/2)

Embedded Markov Chain – M/G/1

Αλυσίδα Markov:

Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτής Κατάστασης i με μεταβάσεις σε Διακριτό Χρόνο $t = t_k$ ανεξάρτητες από το παρελθόν

– Διακριτές Καταστάσεις $i = 0,1,2,\cdots$ με πιθανότητα εμφάνισης $\pi_k(i)$ ύστερα από k βήματα δυνατών εξελίξεων (διαδοχικές μεταβάσεις) $k = 0,1,2,\cdots$ Θεωρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι ανά δύο προσβάσιμες μετά από διαδοχικές μεταβάσεις

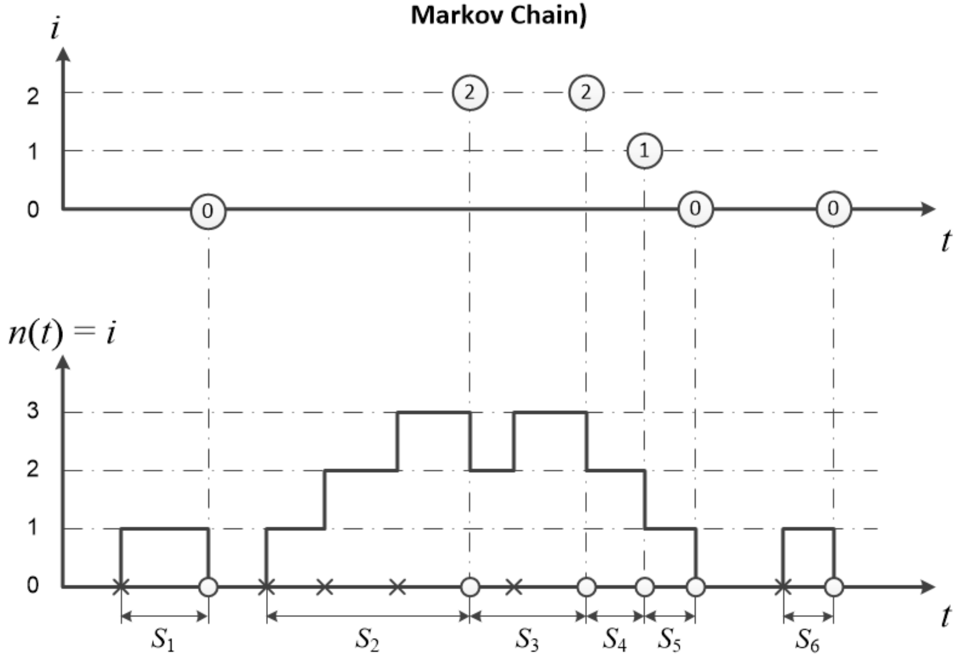
– Εξέλιξη Κατάστασης: Διαδοχικές μεταβάσεις σε διακριτά χρονικά σημεία (βήματα $k = 0,1,2,\cdots$) οδηγούν τη κατάσταση από $j \to i$ με πιθανότητες $\mathrm{P}(i|j)$ ανεξάρτητες από την προϊστορία του συστήματος (οι μεταβάσεις στο κάθε βήμα δεν επηρεάζονται από το παρελθόν) $\Rightarrow$

$$\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(i|j)\,\pi_k(j), \qquad \sum_i \pi_k(i) = 1$$

– Στάσιμες (**stationary**) πιθανότητες, αν υπάρχει σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση (**steady-state**), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις απείρως επισκέψιμες (**επαναληπτικές** - **recurrent**) καταστάσεις:

$$\pi(i) \triangleq \lim_{k\to\infty} \pi_k(i) \;\; \text{και} \;\; \pi(i) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(i|j)\,\pi(j), \forall i$$

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1

ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ MARKOV ΓΙΑ ΟΥΡΑ M/G/1 (2/2)

Embedded Markov Chain – M/G/1

Αλυσίδα Markov:

Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτής Κατάστασης i με μεταβάσεις σε Διακριτό Χρόνο $t = t_k$ ανεξάρτητες από το παρελθόν

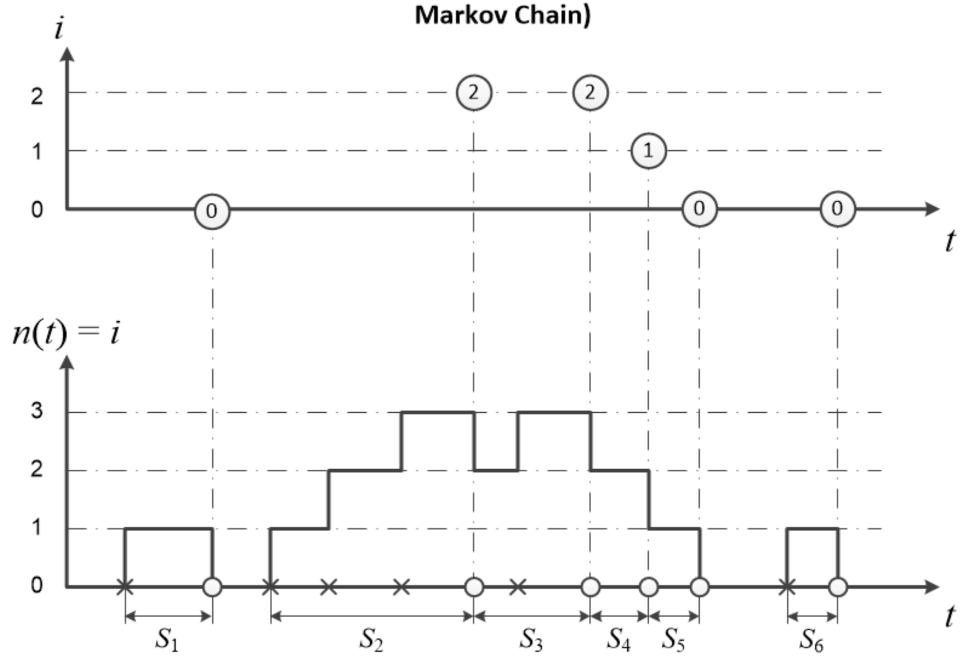
– Διακριτές Καταστάσεις $i = 0,1,2,\cdots$ με πιθανότητα εμφάνισης $\pi_k(i)$ ύστερα από k βήματα δυνατών εξελίξεων (διαδοχικές μεταβάσεις) $k = 0,1,2,\cdots$ Θεωρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι ανά δύο προσβάσιμες μετά από διαδοχικές μεταβάσεις

– Εξέλιξη Κατάστασης: Διαδοχικές μεταβάσεις σε διακριτά χρονικά σημεία (βήματα $k = 0,1,2,\cdots$) οδηγούν τη κατάσταση από $j \to i$ με πιθανότητες $\mathrm{P}(i|j)$ ανεξάρτητες από την προϊστορία του συστήματος (οι μεταβάσεις στο κάθε βήμα δεν επηρεάζονται από το παρελθόν) $\Rightarrow$

$$\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(i|j)\, \pi_k(j), \qquad \sum_i \pi_k(i) = 1$$

– Στάσιμες (**stationary**) πιθανότητες, αν υπάρχει σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση (**steady-state**), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις απείρως επισκέψιμες (**επαναληπτικές** - **recurrent**) καταστάσεις:

$$\pi(i) \triangleq \lim_{k\to\infty} \pi_k(i) \;\; \text{και} \;\; \pi(i) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(i|j)\, \pi(j), \forall i$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov για Ανάλυση Εργοδικών Πιθανοτήτων Συστήματος M/G/1:

– Κατάσταση: Αριθμός πελατών (πληθυσμός) στο σύστημα i **αμέσως μετά από αναχώρηση πελάτη**

– Μεταβάσεις: Σε ενσωματωμένα χρονικά σημεία ορισμένα αμέσως μετά από αναχώρηση πελάτη

– Στάσιμες πιθανότητες $\pi(i)$ της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov: Ίσες λόγω **ισορροπίας** με τη σχετική συχνότητα πληθυσμού i **αμέσως πριν από άφιξη Poisson** και λόγω **PASTA** ίσες με τις εργοδικές πιθανότητες: $\pi(i) = P_i \triangleq \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_i}{\mathrm{T}}$

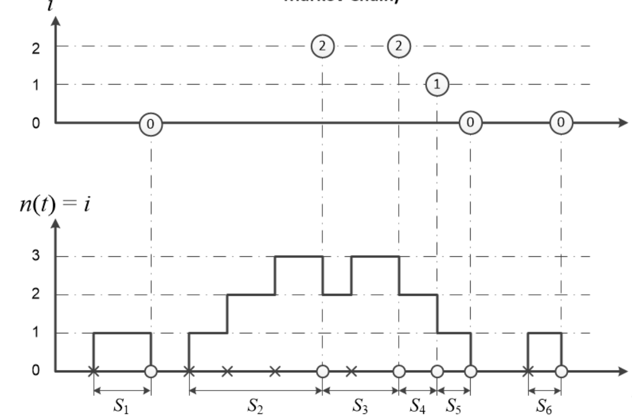
ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (1/3)

Υπολογισμός Διανύσματος Στάσιμων Πιθανοτήτων $\boldsymbol{\pi} = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \ldots]^{\mathrm{T}}$

$P(i|j)$: Πιθανότητες Μετάβασης $j \to i$ σε ενσωματωμένα χρονικά σημεία ορισμένα αμέσως μετά από αναχώρηση

Εξισώσεις Ισορροπίας Μεταβάσεων στη Σταθερή Κατάσταση : $\pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j)\,\pi(j)$, $\sum_i \pi(i) = 1 \forall i$

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)



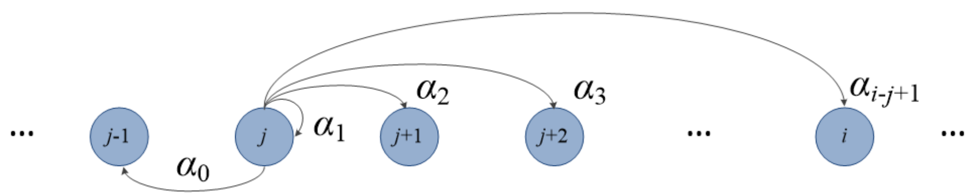
Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1

Ορίζουμε $\alpha_k \triangleq P\{k$ αφίξεις Poisson στο διάστημα εξυπηρέτησης πελάτη $S = t\}$

$= \int_{t=0}^{\infty} [e^{-\lambda t} (\lambda t)^{k} / k!] f_S(t) dt$ (ιδιότητα ***συνολικής πιθανότητας***)

- $\alpha_0 = P(0|0) = P(0|1) = P(1|2) = P(2|3) = P((i-1)|i)\,, i \geq 3$
- $\alpha_1 = P(1|0) = P(1|1) = P(2|2) = P(3|3) = P(i|i)\,, i \geq 3$
- $\alpha_2 = P(2|0) = P(2|1) = P(3|2) = P(4|3) = P((i+1)|i)\,, i \geq 3$
- $\alpha_k = P(k|0) = P(k|1) = P((k+1)|2) = P((k+2)|3) = P((k+i-1)|i)\,, i \geq 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(i|0) = P(i|1) = \alpha_i & \text{για κάθε } i \\ P(i|j) = a_{i-j+1} & \text{για } j > 1, i \geq j-1 \\ P(i|j) = 0 & \text{για } i < j-1 \end{cases}$$



Από Κατάσταση $j > 0$

Παράδειγμα M/M/1:

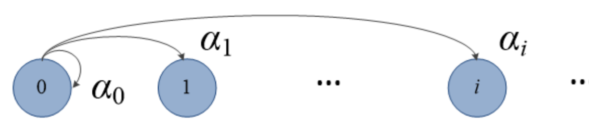
Αν η S έχει εκθετική κατανομή $f_S(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$$\alpha_0 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\alpha_1 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t) \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

$$\alpha_2 = \int_{t=0}^{\infty} \{e^{-\lambda t} (\lambda t)^2 / 2\} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda + \mu}$$

…



Από Κατάσταση $j = 0$

Ενδεικτικές Πιθανότητες Μετάβασης Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (2/3)

Υπολογισμός Διανύσματος Στάσιμων Πιθανοτήτων $\boldsymbol{\pi} = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots]^{\mathrm{T}}$

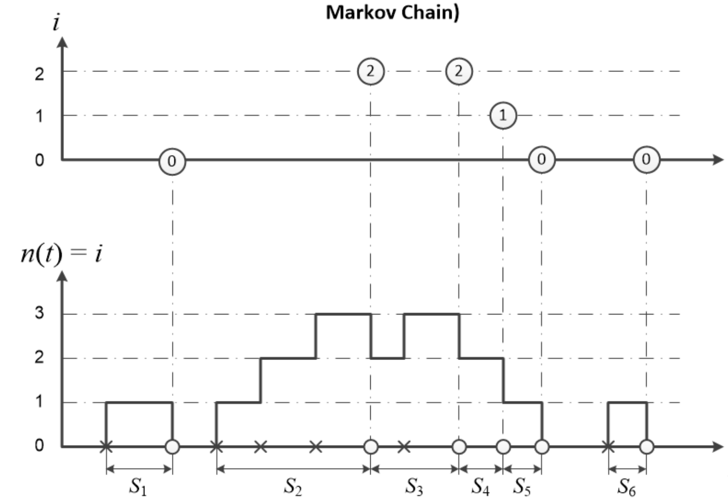
Εξισώσεις Ισορροπίας για τις στάσιμες πιθανότητες **π** της Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \cdots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\pi}$$

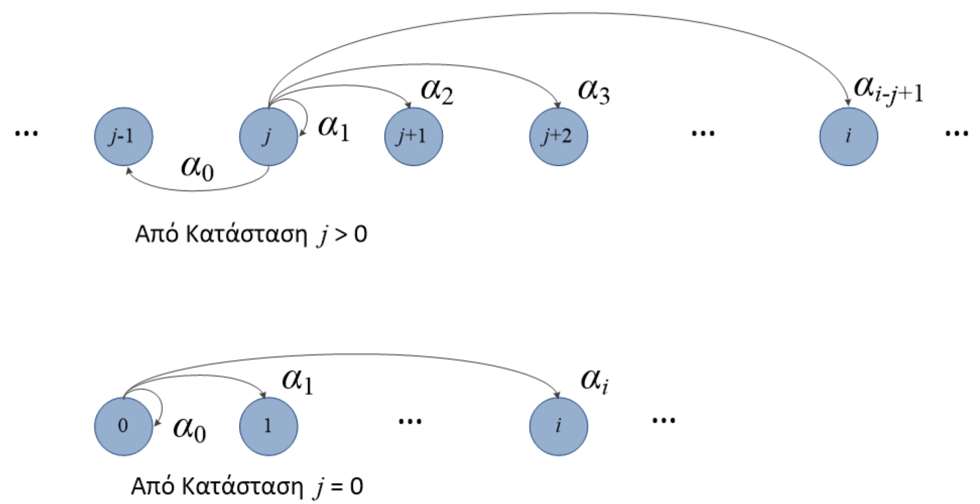
$$\begin{aligned} \pi(i) &= \alpha_i \pi(0) + \alpha_i \pi(1) + \alpha_{i-1}\pi(2) + \cdots + \alpha_2 \pi(i-1) \\ &\quad + \alpha_1 \pi(i) + \alpha_0 \pi(i+1) \\ &= \alpha_i \pi(0) + \sum_{j=0}^{i} a_j \, \pi(i+1-j), \qquad \forall i \end{aligned}$$

$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(3) + \cdots = \sum_i \pi(i) = 1$$

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1



Ενδεικτικές Πιθανότητες Μετάβασης Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (3/3)

Υπολογισμός Μετασχηματισμού z (Moment Generating Function - MGF) του Πληθυσμού i Συστήματος M/G/1

$\mathbf{\Pi}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i)\, z^i,\ |z| \leq 1$

σαν συνάρτηση του Μετασχηματισμού z των α_i:

$\mathbf{A}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, z^k,\ |z| \leq 1$

$$\pi(i) = \alpha_i \pi(0) + \sum_{j=0}^{i} a_j\, \pi(i+1-j)$$

$$\mathbf{\Pi}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i)\, z^i = \frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}\{\sum_{j=0}^{i} a_j z^j\, \pi(i+1-j)\, z^{i+1-j}\} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \pi(0)\, z^i = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\{\sum_{i=j}^{\infty} a_j z^j\, \pi(i+1-j)\, z^{i+1-j}\} + \pi(0)\mathbf{A}(z)$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \{\sum_{i=j}^{\infty} \pi(i+1-j) z^{i+1-j}\} + \pi(0)\mathbf{A}(z) = \frac{1}{z}\mathbf{A}(z)[\mathbf{\Pi}(z) - \pi(0)] + \pi(0)\mathbf{A}(z)$$

Από την ιδιότητα **PASTA** $\pi(0) = P_0 = 1 - \rho = 1 - \lambda \cdot \mathrm{E}(S) \Rightarrow$

$$\mathbf{\Pi}(z) = \frac{\pi(0)\mathbf{A}(z)(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1}\mathbf{A}(z)} = \frac{(1-\rho)\mathbf{A}(z)(1-z)}{\mathbf{A}(z) - z}$$

- Υπολογισμός $\mathbf{A}(z)$ μέσω ***συνολικής πιθανότητα*** αριθμού αφίξεων Poisson σε χρόνο εξυπηρέτησης S:

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_{t=0}^{\infty} \mathrm{P}(k|S{=}t) f_S(t)\, dt\right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} [e^{-\lambda t}(\lambda z t)^k / k!] f_S(t)\, dt = \int_{t=o}^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)t} f_S(t)\, dt = \mathbf{F}_S(\lambda - \lambda z)$$

Τύπος **Pollaczeck – Khinchin (*P-K*)** για την MGF Πληθυσμού i Εργοδικής Ουράς M/G/1

$$\mathbf{\Pi}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i)\, z^i = \frac{(1-\rho)\mathbf{F}_S(\lambda - \lambda z)(1-z)}{\mathbf{F}_S(\lambda - \lambda z) - z}, \qquad |z| \leq 1$$

Παράδειγμα M/M/1:

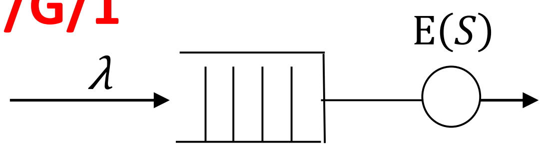
Αν η S έχει εκθετική κατανομή $f_S(t) = \mu e^{-\mu t},\ t \geq 0$

$\mathbf{A}(z) = \mathbf{F}_S(\lambda - \lambda z) = \mu/(\mu + \lambda - \lambda z)$, $\mathbf{\Pi}(z) = (1-\rho)/(1-\rho z)$ και $\pi(i) = (1-\rho)\rho^i,\ i = 0,1,2,\cdots, |z| \leq 1$ και $\rho \leq 1$

ΧΡΟΝΟΙ ΠΑΡΑΜΟΝΗΣ & ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ – M/G/1

Sojourn & Waiting Times – M/G/1

T, W, S: **Χρόνοι Παραμονής** (Sojourn Time), **Αναμονής** (Waiting Time) και **Εξυπηρέτησης** (Service Time), $T = W + S$



<u>Υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace $\mathrm{F}_T(p)$ Χρόνου Παραμονής T Συστήματος M/G/1</u>

- O ***Χρόνος Παραμονής*** πελάτη που εισέρχεται στη ουρά την χρονική στιγμή t ορίζεται σαν η συνολική παραμονή T μέχρι να εξυπηρετηθούν οι $n(t) = i$ πελάτες που βρίσκει μπροστά του (υποθέτουμε εξυπηρέτηση **FCFS/FIFO**). Οι εργοδικές πιθανότητες της $n(t)$ είναι ίσες με τις πιθανότητες $\pi(i)$ της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov $\Rightarrow$ {Πληθυσμός στο σύστημα μετά την αναχώρηση Πελάτη} = {Αριθμός αφίξεων **Poisson** στη διάρκεια του $T = \tau$}

$$\pi(i) = \int_{\tau=0}^{\infty} [e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^{k} / k!] f_T(\tau) d\tau$$

$$\boldsymbol{\Pi}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} \mathrm{P}(i \mid T{=}\tau) f_T(\tau) d\tau\right] z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} [e^{-\lambda\tau}(\lambda z\tau)^i / i!] f_T(\tau) d\tau = \int_{\tau=o}^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda z)\tau} f_T(\tau) d\tau = \mathbf{F}_T(\lambda - \lambda z)$$

Με $p = \lambda - \lambda z$, $z = (\lambda - p)/\lambda$ προκύπτει ο τύπος **Pollaczeck – Khinchin (*P-K*)** για τον Χρόνο Παραμονής T:

> Τύπος **Pollaczeck – Khinchin (*P-K*)** για τον Μετασχηματισμό Laplace Χρόνου Παραμονής T Εργοδικής Ουράς M/G/1
>
> $$\mathbf{F}_T(p) = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-p\tau} f_T(\tau) d\tau = \boldsymbol{\Pi}((\lambda - p)/\lambda) = \frac{(1-\rho)\mathbf{F}_S(p)p}{\lambda \mathbf{F}_S(p) + p - \lambda}$$

Παράδειγμα M/M/1: Εκθετική εξυπηρέτηση $\mathrm{E}(S) = 1/\mu$, $\mathbf{F}_S(p) = \frac{\mu}{\mu+p} \Rightarrow \mathbf{F}_T(p) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho)+p}$ και

$$f_T(\tau) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)\tau}, \tau \geq 0$$

Παράδειγμα M/D/1: Σταθερή εξυπηρέτηση $\mathrm{E}(S) = S = 1/\mu$, $\mathbf{F}_S(p) = e^{-p/\mu} \Rightarrow \mathbf{F}_T(p) = \frac{(1-\rho)e^{-p/\mu} \cdot p}{\lambda e^{-p/\mu} + p - \lambda}$

- $T = W + S$ όπου W, S ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές άρα $\mathbf{F}_T(p) = \mathbf{F}_W(p) \cdot \mathbf{F}_S(p) \Rightarrow$

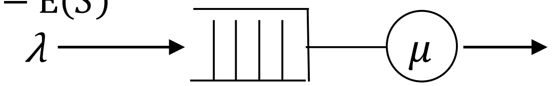
$$\mathbf{F}_W(p) = \frac{(1-\rho)p}{\lambda \mathbf{F}_S(p) + p - \lambda}$$

ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ M/G/1

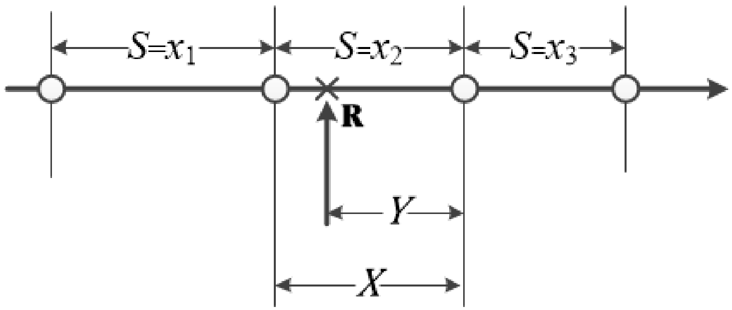
- Από τύπους ***P-K***:
  $\mathrm{E}[n(t)] = \mathbf{\Pi}(1)'$ παραγώγιση της $\mathbf{\Pi}(z)$ με διπλή εφαρμογή του κανόνα L' Hospital και αναγωγή στη τιμή $z=1$
  $\mathrm{E}(T) = \mathbf{F}_T(0)'$ παραγώγιση της $\mathbf{F}_T(p)$ με κανόνα L' Hospital και αναγωγή στη τιμή $p=0$

- Με άμεση εφαρμογή **Μέσων Τιμών**, **Θεωρίας Ανανέωσης** και του τύπου του **Little**:

  - $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}[n(t)]/\lambda,\ \mathrm{E}(W) = \mathrm{E}[n_Q(t)]/\lambda$
  - $\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}(T) - \mathrm{E}(S)$



$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(W) + \mathrm{E}(S) = \mathrm{E}(W) + 1/\mu$$



$n_Q(t)$: Αριθμός πελατών στην αναμονή, $\mathrm{E}[n_Q(t)] = \lambda \cdot \mathrm{E}(W)$

$\mathrm{E}[n_Q(t)] \cdot \mathrm{E}(S)$: Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης πελατών που προηγούνται στην αναμονή

$\rho = \lambda \cdot \mathrm{E}(S)$: Πιθανότητα να υπάρχει πελάτης στην εξυπηρέτηση κατά την άφιξη Poisson (ιδιότητα **PASTA**)

$\mathrm{E}(Y) = \frac{\mathrm{E}(S^2)}{2\mathrm{E}(S)}$: Μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη κατά τυχαία άφιξη (***Renewal Paradox***)

$$\mathrm{E}(W) = \mathrm{E}[n_Q(t)] \cdot \mathrm{E}(S) + \rho \cdot \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(W) \cdot \lambda \cdot \mathrm{E}(S) + \rho \cdot \mathrm{E}(Y) \Rightarrow \mathrm{E}(W) = \frac{\rho \mathrm{E}(Y)}{1-\rho} \quad \Rightarrow$$

Τύπος **Pollaczeck – Khinchin (*P-K*)** για Μέσο Εργοδικό Χρόνο Αναμονής & Παραμονής σε Ουρά M/G/1

$$\mathrm{E}(W) = \frac{\lambda \mathrm{E}(S^2)}{2(1-\rho)}, \qquad \mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(W) + 1/\mu$$

Παράδειγμα M/M/1 : $\mathrm{E}(S) = 1/\mu,\ \mathrm{E}(S^2) = 2/\mu^2 \Rightarrow \mathrm{E}(W) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)},\ \ \mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(W) + 1/\mu = \frac{1/\mu}{(1-\rho)}$

Παράδειγμα M/D/1 : $\mathrm{E}(S) = S = 1/\mu,\ \mathrm{E}(S^2) = 1/\mu^2 \Rightarrow \mathrm{E}(W) = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)},\ \ \mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(W) + 1/\mu$