ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems

Ουρές M/M/1 εν σειρά, Θεώρημα Burke
Ανοικτά Δίκτυα Ουρών Markov, Θεώρημα Jackson
Εφαρμογή σε Δίκτυα Μεταγωγής Πακέτου
Κλειστά Δίκτυα Ουρών Markov, Θεώρημα Gordon-Newell

Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

8/5/2019

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (1/2)

- ***Θεώρημα Burke***: Η έξοδος πελατών από ουρά *M/M/1* ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό τον ρυθμό εισόδου λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

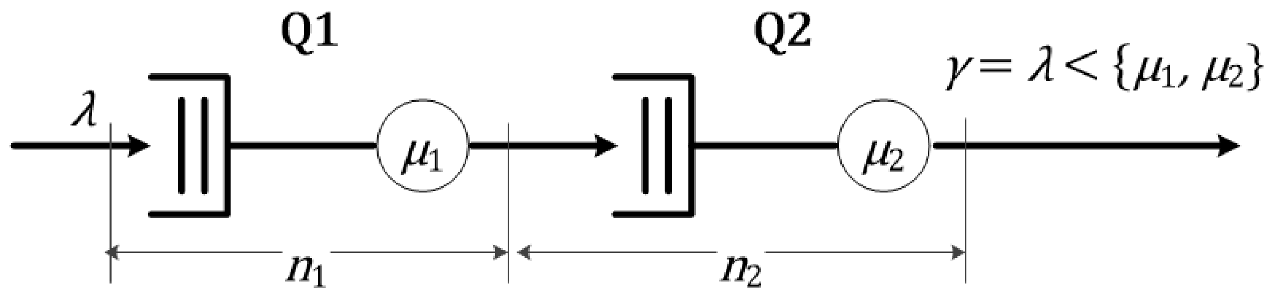
  - Θεωρούμε δύο εκθετικές ουρές $\mathbf{Q1}$, $\mathbf{Q2}$ (π.χ. μεταγωγείς πακέτου) με χρόνους εξυπηρέτησης **ανεξάρτητες** εκθετικές μεταβλητές με μέσους όρους $1/\mu_1, 1/\mu_2$
  - Προσέγγιση με **Παραδοχή Ανεξαρτησίας** ***Leonard Kleinrock*** **σε δίκτυα μεταγωγής πακέτου**: Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (ανάλογοι του μήκους πακέτου) δεν διατηρούν τα μεγέθη τους όταν προωθούνται μεταξύ συστημάτων (ουρών) εξυπηρέτησης . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ανατίθενται σε κάθε σύστημα σαν **ανεξάρτητε**ς εκθετικές τυχαίες μεταβλητές
  - Η είσοδος στην $\mathbf{Q1}$ είναι Poisson με ρυθμό λ (η $\mathbf{Q1}$ είναι ***M/M/1***), $\lambda < \{\mu_1, \mu_2\}$ για εργοδικότητα (ισορροπία)
  - Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ όπου
    n_1# πελατών στην $\mathbf{Q1}$, n_2 # πελατών στην $\mathbf{Q2}$
  - Καταστρώνουμε το διάγραμμα μεταβάσεων καταστάσεων Markov σε δύο διαστάσεις και γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας
  - Εξετάζουμε αν οι εργοδικές πιθανότητες έχουν **μορφή γινομένου** (***product form solution***)
    $P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2)\ ?= P(n_1)P(n_2)?\ = (1-\rho_1){\rho_1}^{n_1}(1-\rho_2){\rho_2}^{n_2} = K{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}$
    όπου $\rho_1 = \lambda/\mu_1$, $\rho_2 = \lambda/\mu_2$ και $K = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$ η ***Σταθερά Κανονικοποίησης***:
    $$\sum_{\boldsymbol{n}} P(\boldsymbol{n}) = 1$$
  - Οι εξισώσεις επαληθεύονται, και επομένως αποτελούν τη ***μοναδική*** λύση (μονοσήμαντα).
  - Άρα οι δύο ουρές συμπεριφέρονται σαν **δύο ανεξάρτητες ουρές *M/M/1*** σε ισορροπία με ρυθμούς εισόδου λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_1, μ_2

Έπεται πως ο ρυθμός εξόδου της $\mathbf{Q1}$ *(και εισόδου στην* $\mathbf{Q2}$*) είναι Poisson με ρυθμό* λ

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (2/2)

Επαλήθευση Υπόθεσης Γινομένου

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{\ n_1}(1-\rho_2)\rho_2^{\ n_2} = K\rho_1^{\ n_1}\rho_2^{\ n_2}$$



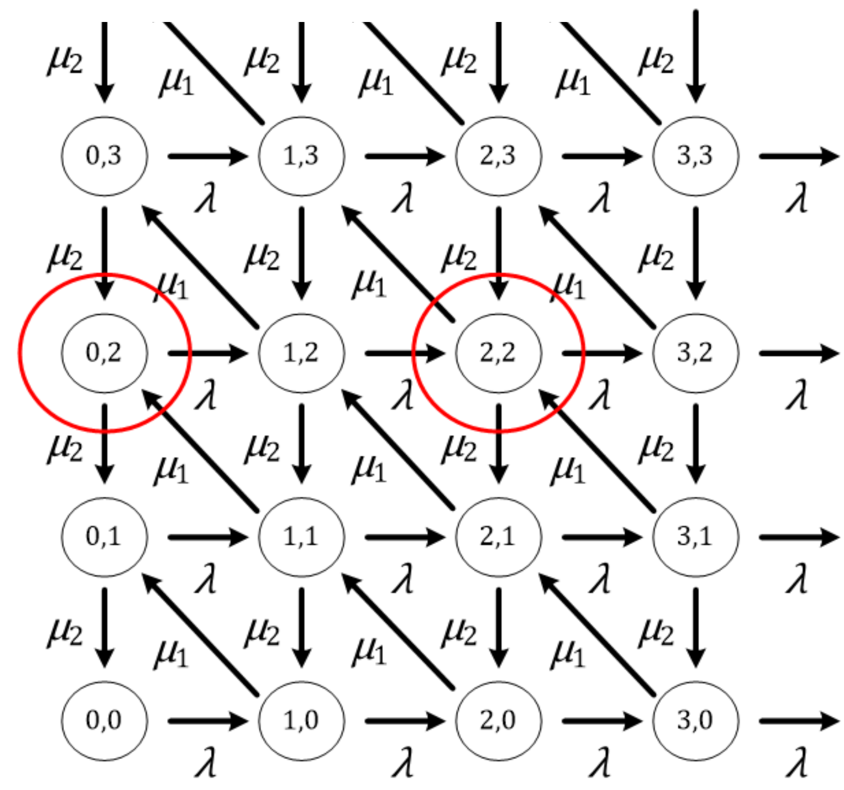
Επαλήθευση για Αντιπροσωπευτικές Καταστάσεις:

$\boldsymbol{n} = (2{,}2)$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(2{,}2)$$
$$=?\ \lambda P(1{,}2) + \mu_1 P(3{,}1) + \mu_2 P(2{,}3)$$
$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)K(\lambda/\mu_1)^2\ (\lambda/\mu_2)^2$$
$$=?\ \lambda K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2)^2 + \mu_1 K(\lambda/\mu_1)^3\ (\lambda/\mu_2)$$
$$+\ \mu_2 K(\lambda/\mu_1)^2\ (\lambda/\mu_2)^3 \quad \surd$$

$\boldsymbol{n} = (0{,}2)$

$$(\lambda + \mu_2)P(0{,}2) =?\ \mu_1 P(1{,}1) + \mu_2 P(0{,}3)$$
$$(\lambda + \mu_2)K(\lambda/\mu_2)^2$$
$$=?\ \mu_1 K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_2)^3 \quad \surd$$



ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/3)

Παραδοχές για Κατάσταση Δικτύου χωρίς Μνήμη (Markov)

- Έξοδος Ουράς Μ/Μ/1 – Θεώρημα ***Burke***
  - Οι αναχωρήσεις πελατών από σύστημα ***M/M/1*** αποτελούν διαδικασία Poisson

- Άθροιση – Διάσπαση διαδικασιών Poisson
  - Άθροιση (aggregation) ανεξαρτήτων ροών Poisson λ_1, λ_2: Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
  - Τυχαία Διάσπαση (random split, routing) ροής Poisson μέσου ρυθμού λ με πιθανότητες $p,\ q = 1 - p$:

    Παράγει διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $p\lambda, (1-p)\lambda$

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/3)

Θεώρημα Jackson

Παραδοχές

- Ανοικτό δίκτυο M ***δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού*** (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i\,, i = 1,2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i

- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$ προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: ***Ανεξάρτητες ροές Poisson*** μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1,2, \dots, M\}$

  Συνολική εξωγενής ροή Poisson σε $\mathbf{Q}_s$: $\gamma_s = \sum_{d=1, d\neq s}^{M} \gamma_{sd}\,, \quad s, d \in \{1,2, \dots, M\}$

- Εσωτερική ***δρομολόγηση*** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_j : r_{ij}$

- Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_j$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{M} r_{ij}\lambda_i\,, \qquad j = 1,2, \dots, M$$

- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (***Kleinrock's Independence Assumption***, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (3/3)

Θεώρημα Jackson

Αποτέλεσμα

- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ αριθμού πελατών n_i στις ουρές (κόμβους κορμού) $\mathbf{Q}_i$

- Η ***Εργοδική Πιθανότητα*** των καταστάσεων $\boldsymbol{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) ***ανεξαρτήτων ουρών M/M/1***

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P(n_1)P(n_2)\dots P(n_M)$$

$$P(n_i) = (1-\rho_i){\rho_i}^{n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

όπου λ_i ο συνολικός μέσος ρυθμός (***Poisson***) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης μ_i

- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η $\mathbf{Q}_i$ με το μέγιστο ρ_i

- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{E}(n_\iota) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$

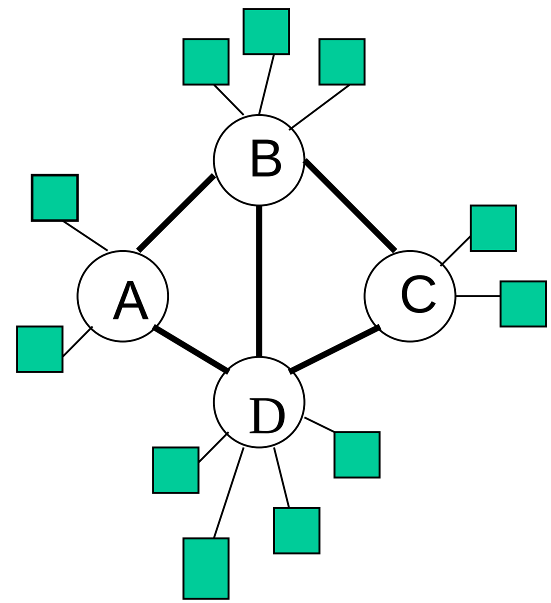
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\boldsymbol{\gamma}$ (***τύπος Little***) όπου $\boldsymbol{\gamma}$ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (***Poisson***) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (***network throughput***) $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{s=1}^{M} \sum_{d=1, d\neq s}^{M} \gamma_{sd}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο s σε κόμβο d: $\mathrm{E}(T_{sd}) = \sum_{i-1}^{M} \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1-\rho_i}$

  όπου $\delta_{sd}(i)$ το κλάσμα της ροής γ_{sd} που διαπερνά τον κόμβο $\mathbf{Q}_i$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (1/2) (Internet – Intranet)

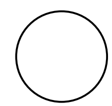
- Θεωρήστε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων.
  - Όλες οι γραμμές (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10$ Gbits/sec. Το μέσο μήκος του πακέτου είναι $E(L) = 1000$ bits (θεωρείστε εκθετική κατανομή).
  - Μεταξύ κόμβων θεωρείστε προσφερόμενους ρυθμούς πακέτων Poisson, με ίσους ρυθμούς r packets/sec (από άκρο σε άκρο).
  - Πακέτα από το A στο C και αντίστροφα δρομολογούνται εξίσου στους δύο ισότιμους δρόμους: (A-B-C) και (A-D-C). Τα πακέτα μεταξύ κόμβων κατευθείαν συνδεδεμένων (A-B), (A-D), (B-D), (B-C), (D-C) δρομολογούνται κατευθείαν.



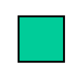
- (A) Βρείτε το ρυθμό r ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι 50%

- (B) Με το r του (A) βρείτε τη μέση καθυστέρηση ενός τυχαίου πακέτου στο δίκτυο (από άκρο σε άκρο)

ΟΔΗΓΙΑ: Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού λ_i (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i/E(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**

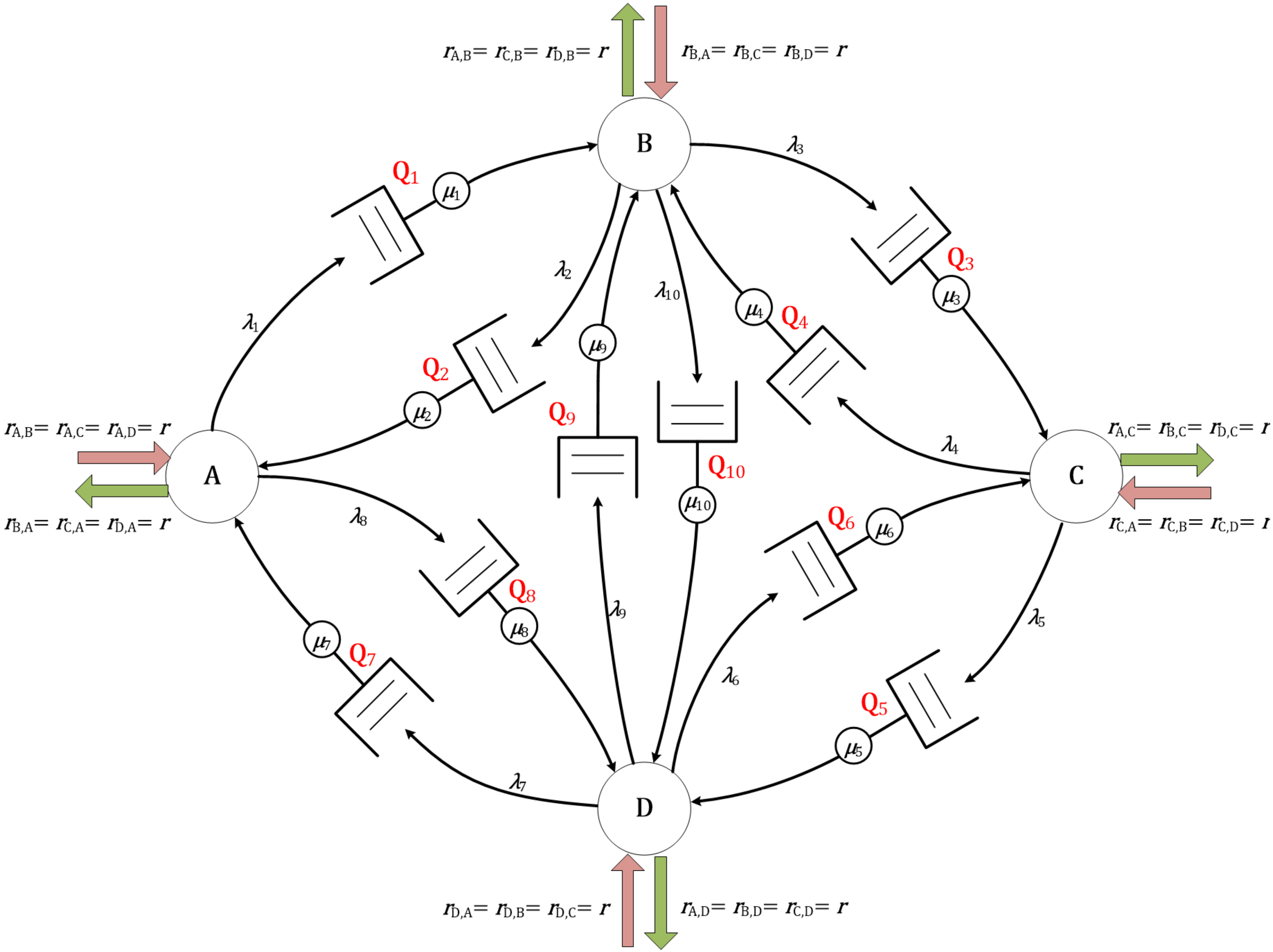


Κόμβος Δικτύου Κορμού (Δρομολογητής Κορμού, Backbone Router, Packet Switch)



Κόμβος Εισόδου (H/Y, Access Node, Customer Network - LAN)

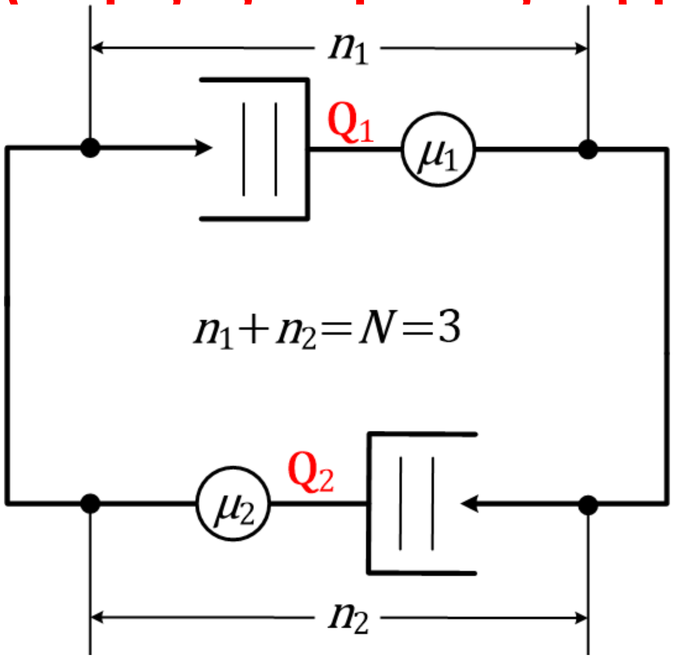
ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (2/2)

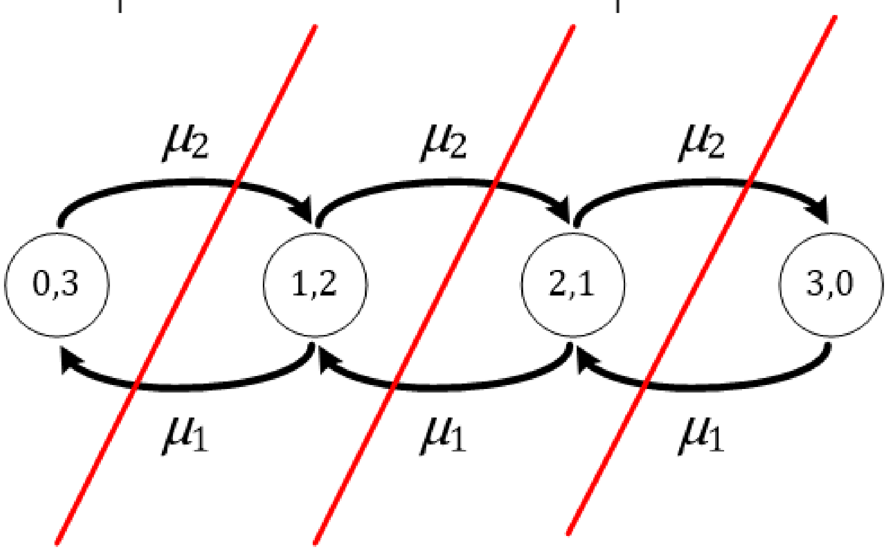


ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

$M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Αενάως Περιφερόμενοι Πελάτες

(Χωρίς Εξωτερικούς Κόμβους - Πηγές & Προορισμούς Πελατών)





$$n_1 + n_2 = N = 3, \qquad \mu_1/\mu_2 = \alpha$$

$$\mu_1 P(1,2) = \mu_2 P(0,3)$$
$$\mu_1 P(2,1) = \mu_2 P(1,2)$$
$$\mu_1 P(3,0) = \mu_2 P(2,1)$$
$$P(0,3) + P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1$$

$$P(0,3) = \alpha^3/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$
$$P(1,2) = \alpha^2/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$
$$P(2,1) = \alpha/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$
$$P(3,0) = 1/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$
$$P(0,3)[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]/\alpha^3 = 1$$

$$\gamma = \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_1 [1 - P(0,3)] =$$
$$= \mu_2 [\alpha + \alpha^2 + \alpha^3]/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] =$$
$$= \mu_1 [1 + \alpha + \alpha^2]/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$\mathrm{E}(n_1) = P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) =$$
$$= [\alpha^2 + 2\alpha + 3]/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$\mathrm{E}(n_2) = P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) =$$
$$= [\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3]/[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$\mathrm{E}(n_1) + \mathrm{E}(n_2) = N = 3 \text{ πελάτες}$$

ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL (1/2)

Παραδοχές:

- Κλειστό δίκτυο N περιφερομένων πελατών σε M διασυνδεόμενα υποσυστήματα (ουρές) $\mathbf{Q}_i$ εκθετικής εξυπηρέτησης σταθερού συνολικού αριθμού πελατών $N = \sum_{i=1}^{M} n_i$ όπου n_i ο αριθμός πελατών στο $\mathbf{Q}_i$ στην εργοδική κατάσταση: Τυχαία μεταβλητή $n_i = \lim_{t\to\infty} n_i(t)$
- Ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές i = 1, 2, …, M ρυθμού μ_i με παραδοχή ***Kleinrock***
- Τυχαία Δρομολόγηση από υποσύστημα $\mathbf{Q}_i$ σε $\mathbf{Q}_j$ με πιθανότητα $\mathrm{p}_{ij} = \mathrm{Prob}\{i \to j\}$

Θεώρημα: Οι εργοδικές πιθανότητες της $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ έχουν **μορφή γινομένου**:

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} (X_i)^{n_i}$$

- Οι παράμετροι X_i είναι **ανάλογες** των βαθμών χρησιμοποίησης των ουρών i, κατ' αναλογία με τα $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ στα ανοικτά δίκτυα ουρών Μ/Μ/1 του Θεωρήματος ***Jackson***
- Η ρυθμαπόδοση λ_j διαμέσου του $\mathbf{Q}_j$ είναι ανάλογη του $\mu_j X_j$. Οι X_j δεσμεύονται από γραμμικό σύστημα διατήρησης μέσων ρυθμών πελατών από δρομολόγηση άλλων $\mathbf{Q}_i$:

$$\mu_j X_j = \sum_{i=1}^{M} \mu_i X_i \mathrm{p}_{ij}\,, \qquad j = 1, \dots, N$$

- Συνήθως ορίζουμε αυθαίρετα την τιμή της $X_1 = 1$ ώστε το ανωτέρω **γραμμικώς εξαρτημένο σύστημα εξισώσεων** να έχει μονοσήμαντη λύση για τις παραμέτρους X_j **Σημείωση**: Στα ανοικτά δίκτυα ***Jackson*** οι εξωτερικές ροές εισόδου γ_ι εγγυώνται τη γραμμική ανεξαρτησία των εξισώσεων διατήρησης μέσων ρυθμών πελατών

ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ
ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL (2/2)

- Η σταθερά $G(N)$, προκύπτει από την εξίσωση **κανονικοποίησης** (άθροισμα εργοδικών πιθανοτήτων για όλες τις πιθανές απείρως επισκέψιμες καταστάσεις - positive recurrent states - ίσο με μονάδα)

- Η $G(N)$ αντιστοιχεί στη ***Συνάρτηση Κερματισμού – Partition Function*** της Στατιστικής Μηχανικής. Ο υπολογισμός της απαιτεί την καταγραφή όλων των καταστάσεων $(n_1, n_2, \dots, n_M)$ συνδυασμών n_i που αθροίζουν σε N (στην γενικότητα του «δύσκολο» πρόβλημα). Στην περίπτωση μας λύνεται με τον Επαναληπτικό Αλγόριθμο του ***Buzen*** (*επόμενη διάλεξη*)

- Οι οριακές πιθανότητες (**Marginal Probabilities**) για το υποσύστημα (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ δίνονται από:

$$P(n_i = k) = \frac{X_i^k}{G(N)}[G(N-k) - X_i G(N-k-1)]$$

- Ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή i δίνεται από

$$P(n_i \geq 1) = X_i G(N-1)/G(N)$$

- Ο μέσος αριθμός πελατών στο υποσύστημα $\mathbf{Q}_i$(μαζί με τον εξυπηρετούμενο) δίνεται από:

$$\mathrm{E}[n_i] = \sum_{k=1}^{N} X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}$$