

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Queuing Systems

Συστήματα Γεννήσεων – Θανάτων:

1. Σφαιρικές & Λεπτομερείς Εξισώσεις Ισορροπίας
2. Ουρές Markov $M/M/1$, $M/M/1/N$

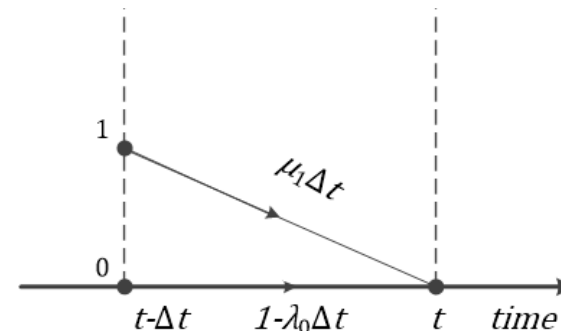
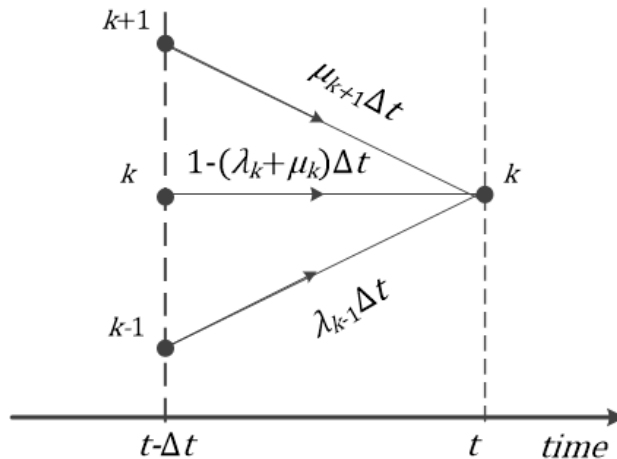
Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

27/3/2019

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/4)

- Παραδοχές: **Birth – Death Processes (επανάληψη)**
 - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
 - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού $n(t)$ βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
 - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
 - Την χρονική στιγμή t το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n(t) = k$
 - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta t, \Delta t \rightarrow 0$:
 - Μία άφιξη στο διάστημα Δt , με πιθανότητα $\lambda_{k-1}\Delta t$ αν $k > 0$
 - Μια αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{k+1}\Delta t$ αν υπάρχει η $k + 1$ (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού K μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu_{k+1} = 0$)
 - Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t$ αν $k > 0$ ή $1 - \lambda_0\Delta t$ αν $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (**Chapman - Kolmogorov**) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
 - $P_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t]P_k(t - \Delta t)$
 - $P_0(t) = \mu_1\Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0\Delta t) P_0(t - \Delta t)$
 - με αρχικές συνθήκες $P_\nu(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k P_k(t) = 1, \forall t$



ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/4)

Birth – Death Processes (επανάληψη)

Στο όριο, $\Delta t \approx dt \rightarrow 0$, $\frac{P_k(t) - P_k(t - \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dP_k(t)}{dt}$ και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

$$\text{➤ } \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\text{➤ } \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1P_1(t) - \lambda_0P_0(t)$$

$$\text{➤ } \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_k P_k(t) = 1, \forall t$$

Όταν $t \rightarrow \infty$ και υπό ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παύει να επηρεάζεται για απείρωσ επισκέψιμες καταστάσεις $n(t) = k$ (**επαναληπτικές, positive recurrent**), ξεχνιέται η αρχική συνθήκη $P_k(0)$ και οι $P_k(t)$ συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες $P_k > 0$:

$$\text{Για } t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0 : \text{Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες}$$

Σημείωση: Ισχύει η **εργοδική** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν $P_k =$

$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T_k}{T} \right\}$ όπου T_k είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα T_k όταν $n(t) = k$ σε μεγάλο χρονικό

ορίζοντα T μιας καταγραφής της ανέλιξης $n(t)$ σε **ισορροπία**.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες **Εξισώσεις Ισορροπίας**:

$$\text{➤ } (\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \quad k > 1$$

$$\text{➤ } \lambda_0P_0 = \mu_1P_1$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/4)

Birth – Death Processes (επανάληψη)

Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda, k = 0,1,2,3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $E(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, k = 1,2,3, \dots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων $P[n(t) = k] = P_k(t)$ προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\text{➤ } \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\text{➤ } \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$\text{➤ } \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

- Στο όριο $t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0$, τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και γενικά } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

Εφόσον $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά $(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \rightarrow \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1$ και

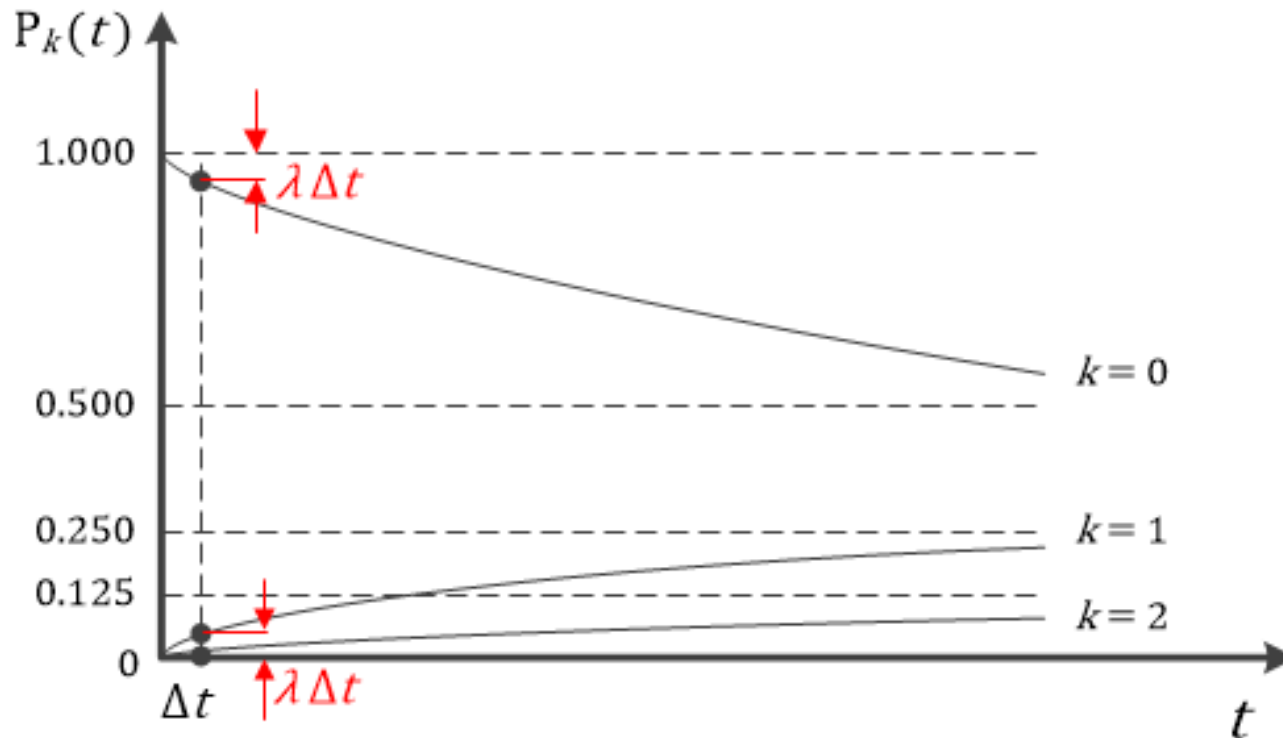
$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0$$

Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: $E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (4/4)

Birth – Death Processes (επανάληψη)

Χρονική Εξέλιξη Πιθανοτήτων Κατάστασης Απλής Ουράς Μ/Μ/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \text{ Erlangs}$$

Αρχικές Συνθήκες: $P_0(0) = 1$, $P_k(0) = 0$

Οριακές Εργοδικές Πιθανότητες:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = P_0 = 1 - \rho = 0.500$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = P_1 = (1 - \rho)\rho = 0.250$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) = P_2 = (1 - \rho)\rho^2 = 0.125$$

ΟΥΡΑ ΜΑΡΚΟΝ Μ/Μ/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda = \gamma, k = 0,1,2,3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $E(s) = \frac{1}{\mu}$ sec: $\mu_k = \mu, k = 1,2,3, \dots$
- $\rho = u = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Οι **εργοδικές πιθανότητες** προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και } P_k = \rho^k P_0, k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

Με $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει, $P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow$

$$P_0 = (1 - \rho), P_k = (1 - \rho)\rho^k, k > 0 \text{ και } P\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$$

- Μέση κατάσταση συστήματος Μ/Μ/1 σε ισορροπία:

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

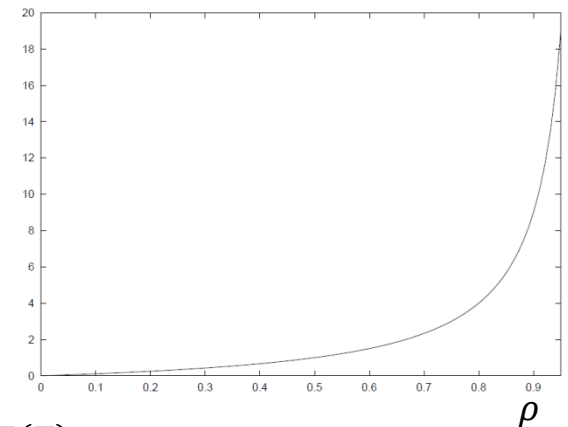
- Μέσος χρόνος καθυστέρησης: Τύπος Little

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1 - \rho}$$

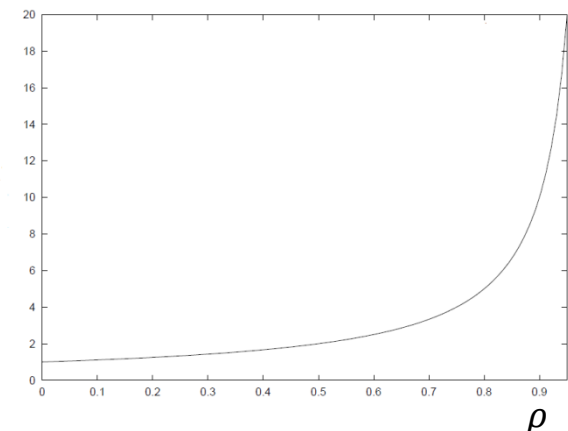
- Μέσο μήκος ουράς & μέσος χρόνος αναμονής Μ/Μ/1:

$$E[n_q(t)] = E[n(t)] - \rho, \quad E(W) = E(T) - 1/\mu$$

$E[n(t)]$

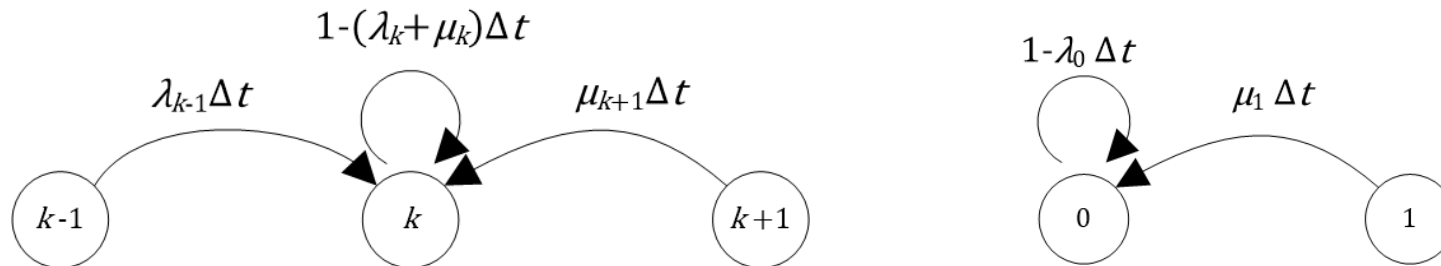


$E(T)$



ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (1/3)

- Birth-Death Process: Διάγραμμα **Πιθανοτήτων Μεταβάσεων** σε χρόνο $\Delta t \rightarrow 0$ προς $n(t) = k$

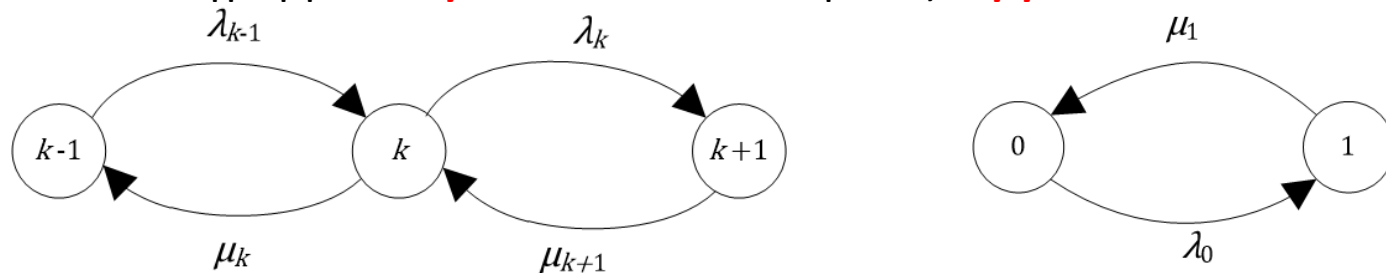


Εξισώσεις Μετάβασης (**Charpan - Kolmogorov**):

$$P_k(t) = \lambda_{k-1} \Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1} \Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t] P_k(t - \Delta t), \quad k \geq 1$$

$$P_0(t) = \mu_1 \Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0 \Delta t) P_0(t - \Delta t)$$

- Birth-Death Process: Διάγραμμα **Ρυθμών Μεταβάσεων** μεταξύ **Εργοδικών** Καταστάσεων



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \text{ για } k \geq 1 \text{ και } \lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

Σχετικές Πιθανότητες Μεταβάσεων $k \rightarrow (k + 1), k \rightarrow (k - 1)$:

$$P[k \rightarrow (k + 1)/\text{μετάβαση}] = \lambda_k / (\lambda_k + \mu_k), \quad P[k \rightarrow (k - 1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k / (\lambda_k + \mu_k)$$

Dwell Time - Χρόνος Παραμονής στην $n(t) = k$ μέχρι την επόμενη μετάβαση

Εκθετική τυχαία μεταβλητή d_k με μέσο $1/(\lambda_k + \mu_k)$: Η μικρότερη δύο ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μέχρι (1) την επόμενη άφιξη με μέσο $1/\lambda_k$ ή (2) την ολοκλήρωση εξυπηρέτησης με μέσο $1/\mu_k$

$$d_k = \min(x, y), F_{d_k}(\tau) = P\{d_k \leq \tau\} = 1 - P\{d_k > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_k + \mu_k)\tau} \text{ διότι}$$

$$P\{d_k > \tau\} = P\{x > \tau, y > \tau\} = P\{x > \tau\}P\{y > \tau\} = e^{-\lambda_k \tau} e^{-\mu_k \tau} = e^{-(\lambda_k + \mu_k)\tau}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (2/3)

- Απείρως επισκέψιμες επαναληπτικές καταστάσεις $s = n(t)$ **positive recurrent states**: Με μη μηδενικές εργοδικές πιθανότητες $P\{n(t) = k\} = P_k(t) \rightarrow P_k > 0, k = 0,1,2, \dots$
- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων από και προς την κατάσταση s :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ } s\} = \#\{\text{ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ } s\}$$

Εξισώσεις Σφαιρικής Ισορροπίας, Global Balance Equations

- Υπό συγκεκριμένες συνθήκες (ισχύουν για διαδικασίες **birth-death**) οι **Εξισώσεις Σφαιρικής Ισορροπίας** μπορεί να αντικατασταθούν από απλούστερες **Εξισώσεις Λεπτομερούς (Ακριβούς) Ισορροπίας, Detailed Balance Equations** ως εξής:
 - Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T αν ισχύουν οι συνθήκες **Λεπτομερούς Ισορροπίας** ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων μεταξύ δύο αμφίδρομα γειτονικών καταστάσεων s_1 και s_2 :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_1 \rightarrow s_2\} = \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_2 \rightarrow s_1\}$$

- Λόγω **εργοδικότητας** σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T , με T_1 και T_2 τους συνολικούς χρόνους παραμονής στις s_1, s_2 :

$$(1) \quad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_1 \rightarrow s_2\} = T_1 \times r_{1,2}$$

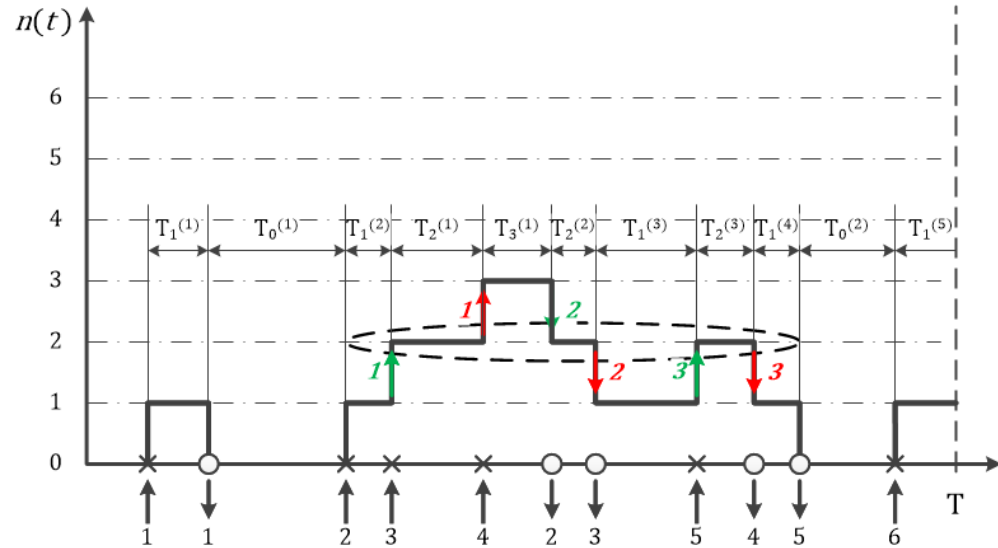
$$(2) \quad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } s_2 \rightarrow s_1\} = T_2 \times r_{2,1}$$

όπου $r_{1,2}, r_{2,1}$ οι μέσοι ρυθμοί μεταβάσεων μεταξύ των s_1 και s_2

$$(1) = (2) \text{ και } r_{1,2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_1}{T} = r_{2,1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T} \text{ ή}$$

$$r_{1,2} P_1 = r_{2,1} P_2 \text{ **Detailed Balance Equations**}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (3/3)



Global Balance Equation

$$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$$

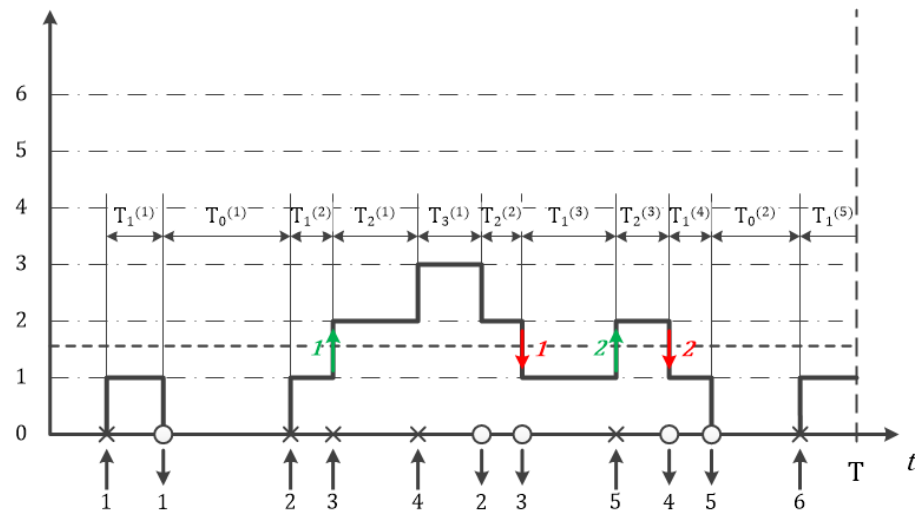
$$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}, T_3 = T_3^{(1)}$$

(State 2: **Transitions In** = **Transitions Out**)

$$\lambda T_1 + \mu T_3 \sim \lambda T_2 + \mu T_2 \Rightarrow (\lambda T_1 + \mu T_3)/T \sim (\lambda + \mu) (T_2/T)$$

$$\Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2$$

χηματική Απεικόνιση σε Διαδικασίες Birth-Death
Εξισώσεις Ισορροπίας στην Εργοδική Κατάσταση
Χρόνος Παρατήρησης Δείγματος $n(t)$: T



Detailed Balance Equation

$$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$$

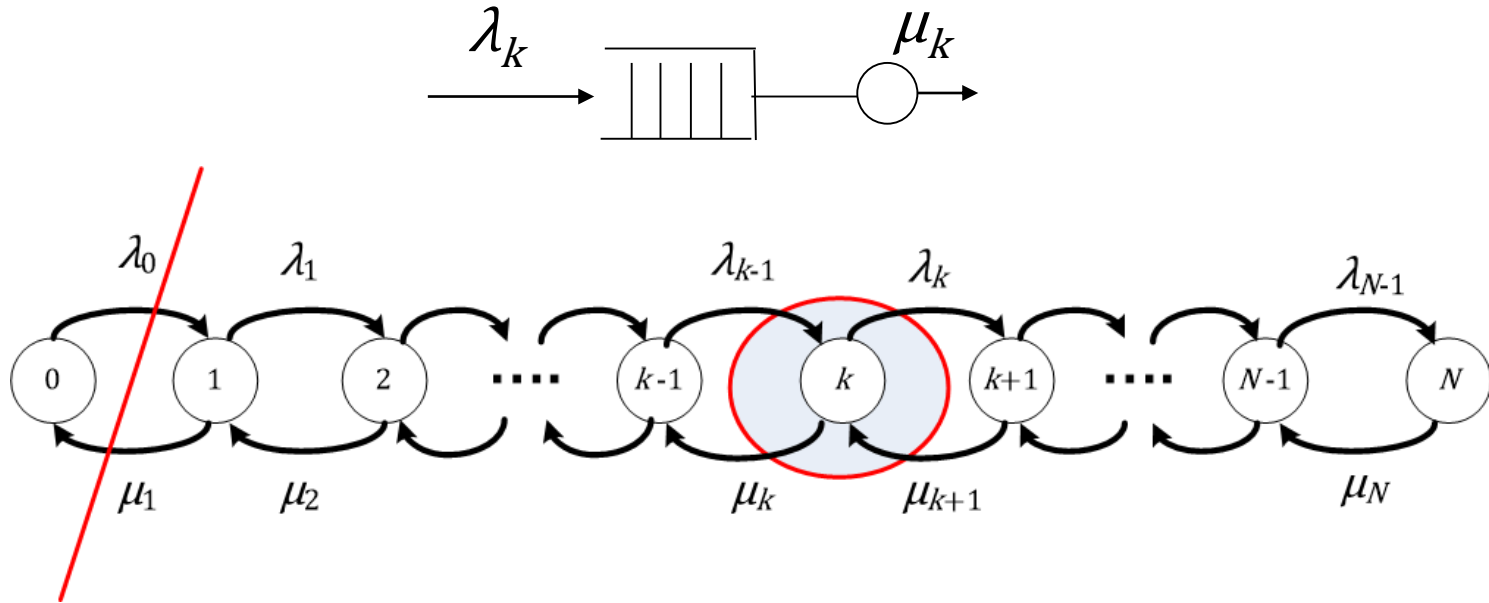
$$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}$$

(**Transitions 1->2** = **Transitions 2->1**)

$$\lambda T_1 \sim \mu T_2 \Rightarrow \lambda (T_1/T) \sim \mu (T_2/T) \Rightarrow \lambda P_1 = \mu P_2$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/Ν (1/2)

- Συστήματα Μ/Μ/1/Ν με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)
(State Dependent Μ/Μ/1/Ν Queues)



Detailed Balance Equations

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Global Balance Equations

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \quad k = 1, \dots, N$$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

$$P_0 + \dots + P_N = 1$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/Ν (2/2)

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

$$\lambda_k = \lambda, \text{ Poisson, } k = 1, 2, \dots, N$$

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

$$\mu_k = \mu, k = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης } s, E(s) = 1/\mu$$

- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

$$P_k = \rho^k P_0, k = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$P_0 + P_1 + \dots + P_{N-1} + P_N = 1$$

$$\rho = \lambda/\mu \text{ Erlangs (η } M/M/1/N \text{ είναι } \mathbf{\text{πάντα ευσταθής}} \text{ γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)}$$

- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}, \quad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N + 1}, \quad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{\text{blocking}} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$E[n(t)] \rightarrow E(k) = \sum_{k=1}^N k P_k = \rho \frac{1 - (N + 1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $E(T) = E(k)/\gamma = E(k)/[\lambda(1 - P_N)]$