ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems

Επισκόπηση Γνώσεων Πιθανοτήτων
Κατανομή Poisson & Εκθετική Κατανομή
Διαδικασία Markov Γεννήσεων – Θανάτων
(Birth – Death Markov Processes)

Βασίλης Μάγκλαρης

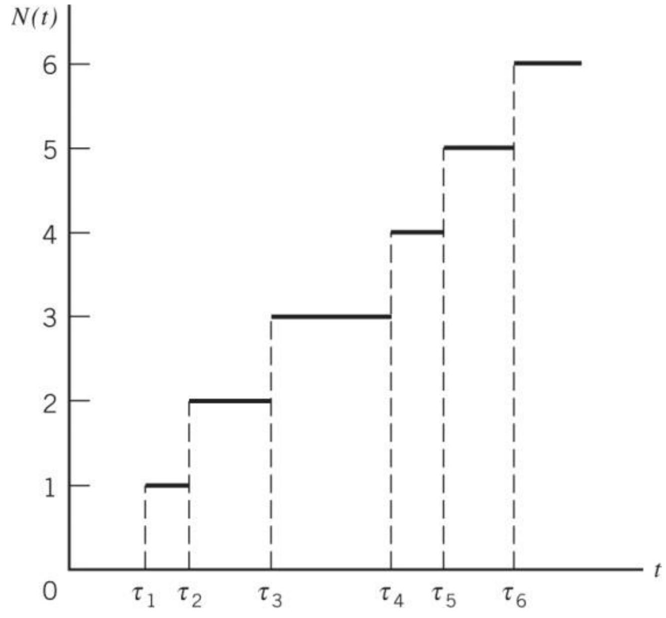
maglaris@netmode.ntua.gr

20/3/2019

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια Στοχαστική Ανέλιξη Καταμέτρησης *(Counting Process)* $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t+T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης *(τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον)*, η ν ακολουθεί την **κατανομή *Poisson* με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος** T: $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό *(rate)* εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (1/3)

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$ απαρίθμησης γεγονότων σε χρονικό διάστημα παρατήρησης T που εμφανίζονται **τυχαία** και **ανεξάρτητα** από παρελθούσες ή μελλοντικές εμφανίσεις γεγονότων στο δείγμα (υλοποίηση) της Στοχαστικής Ανέλιξης μετρητή $N(t)$ στο οποίο συνεισφέρουν (**ιδιότητα έλλειψης μνήμης *Markov***)

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα T είναι $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$

Εφαρμογές σε ανεξάρτητες εμφανίσεις τυχαίων γεγονότων:

- Τυχαίες εκρήξεις που προκαλούν τον **ΘΟΡΥΒΟ ΒΟΛΗΣ** σε ηλεκτρονικές συσκευές επικοινωνών
- Ανεξάρτητες τυχαίες **αφίξεις πελατών** σε **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ** με απαιτήσεις εξυπηρέτησης όπως:
  - Διεκπεραίωση Τηλεφωνικών Κλήσεων
  - Διακίνηση Πακέτων Δεδομένων στο Internet
  - Κυκλοφορία Αυτοκίνητων σε Οδικά Συστήματα
  - Αγορές και Πληρωμές σε Καταστήματα
  - Επεξεργασία Δεδομένων σε Κοινές Υπολογιστικές Υποδομές

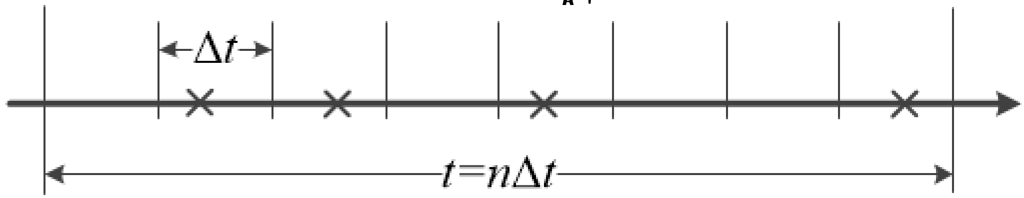
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (2/3)

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (*σημείων*) ***Poisson*** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή *(Discrete Random Variable)* $\{\nu = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$\mathrm{P}_t[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernouilli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (***επιτυχία***) με πιθανότητα $p = \lambda\Delta t$, μη εμφάνιση (***αποτυχία***) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

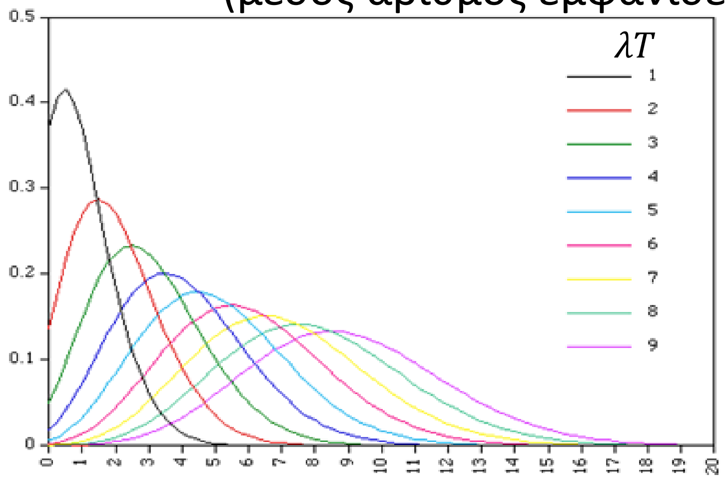
- Στο όριο $\Delta t \to 0$, $n \to \infty$, $t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

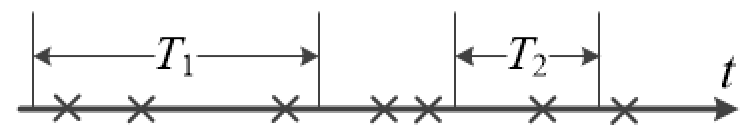
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (3/3)

Κατανομή Poisson για Διαφορετικές Τιμές του $\lambda T = \mathrm{E}[N(T)]$

(μέσος αριθμός εμφανίσεων γεγονότων σε διάστημα T)



Οι συνεχείς καμπύλες στο σχήμα είναι οι περιβάλλουσες των Συναρτήσεων Μάζας Πιθανότητας (Ιστογράμματος) της Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής Poisson $\mathrm{P}_T[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$

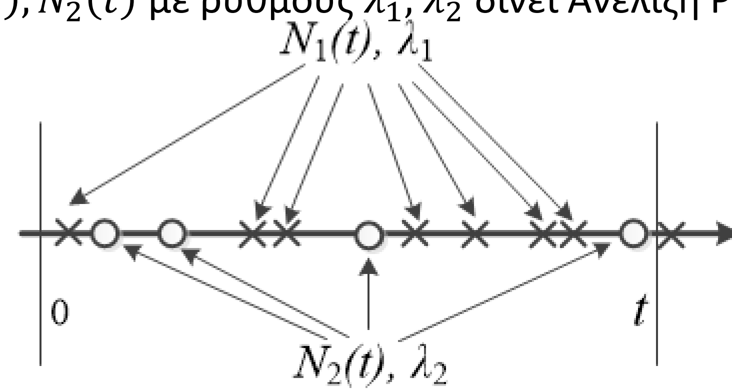


Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης Poisson

- **Μέση Τιμή & Διασπορά**: $\mathrm{E}[N(t)] = \sigma^2_{N(t)} = \lambda t$

  Απόδειξη: $\mathrm{E}[N(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[N_i(t)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda \Delta t = \lambda t$, $\sigma^2_{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{N_i(t)} = \lambda t$
- Ο συνολικός αριθμός σημείων Στοχαστική Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ σε **μη υπερ-καλυπτόμενα** χρονικά διαστήματα T_1, T_2 είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_1 + T_2)$
- **Υπέρθεση** δυο **ανεξαρτήτων** Ανελίξεων Poisson $N_1(t), N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 δίνει Ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- **Διάσπαση** Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ μέσω ανεξαρτήτων τυχαίων επαναλήψεων **Bernoulli** με πιθανότητες $p, q = 1 - p$

  Παράδειγμα: Τυχαία δρομολόγηση χωρίς μνήμη δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίξεις (διαδικασίες) Poisson με μέσους ρυθμούς $\lambda_1 = p\lambda, \lambda_2 = q$



Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (1/2)

Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής (CDF) & Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (PDF) μεταξύ Σημείων Poisson

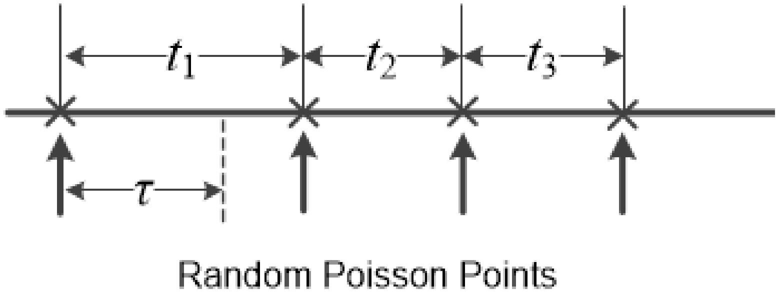
Το χρονικό διάστημα τ μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων σημείων Poisson είναι Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή (*Continuous Random Variable*) με ***Εκθετική Κατανομή*** (*Exponential Distribution*):

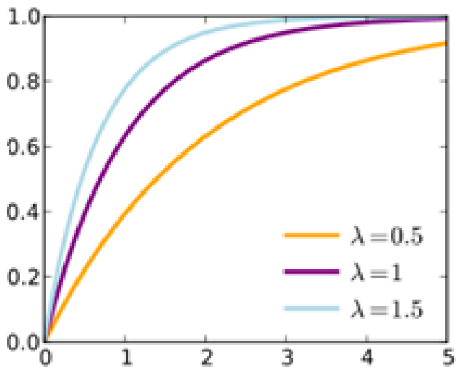
CDF: $F_\tau(t) = \mathrm{P}[\tau \leq t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$ και **PDF**: $f_\tau(t) = \frac{dF_\tau(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$

Απόδειξη

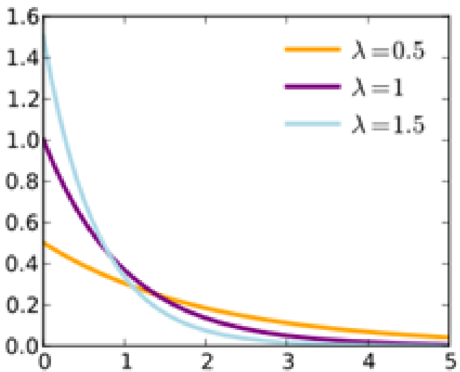
$$1 - F_\tau(t_1) = 1 - \mathrm{P}[\tau \leq t_1] = \mathrm{P}[\tau > t_1] = \mathrm{P}_{t_1}[\nu = 0] = \frac{(\lambda t_1)^0}{0!} e^{-\lambda t_1} = e^{-\lambda t_1}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution





CDF: $F_\tau(t) = \mathbf{P}[\tau \leq t]$



PDF: $f(t) = \frac{dF_\tau(t)}{dt}$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (2/2)

Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

- $\mathrm{E}[\tau] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$

- $\mathrm{E}[\tau^2] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = 2/\lambda^2, \ \ \sigma_\tau^2 = \mathrm{E}[\tau^2] - (\mathrm{E}[\tau])^2 = 1/\lambda^2$

- Ιδιότητα έλλειψης μνήμης:

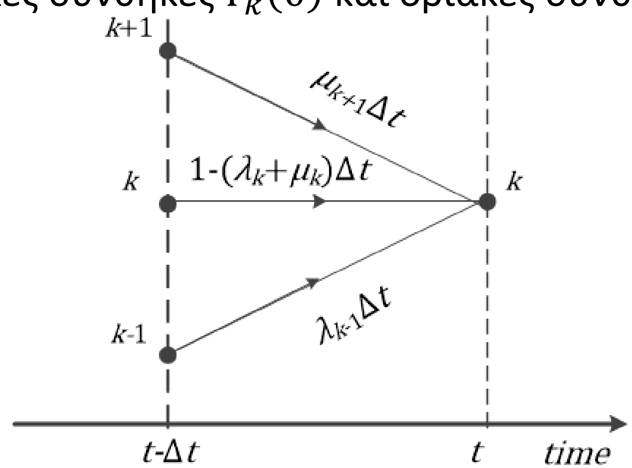
$$\mathrm{P}[\tau > t + s \,|\tau > s] = \frac{\mathrm{P}[\tau > t + s, \ \ \tau > s]}{\mathrm{P}[\tau > s]} = \frac{\mathrm{P}[\tau > t + s]}{\mathrm{P}[\tau > s]} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}[\tau > t]$$
$$= 1 - F_\tau(t)$$

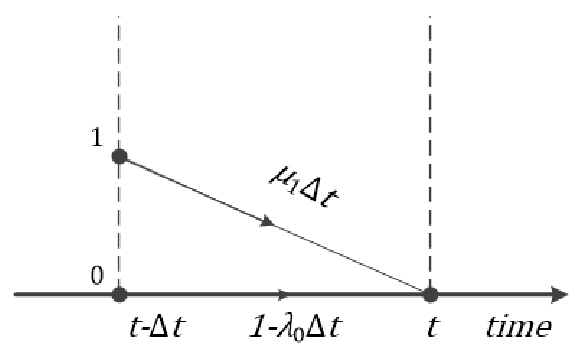
Η εκθετική κατανομή είναι η **μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής** με την ιδιότητα αυτή (*Memoryless, Markov Property*). Την ίδια ιδιότητα έχει η *διακριτή γεωμετρική κατανομή της οποίας το όριο σε συνεχές πεδίο ορισμού είναι η εκθετική κατανομή*

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/4)

Birth – Death Processes

- Παραδοχές:
  - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
  - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού $n(t)$ βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
  - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
  - Την χρονική στιγμή t το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό $n(t) = k$
  - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή $t - \Delta t, \Delta t \to 0$:
    - ➢ Μία άφιξη στο διάστημα Δt, με πιθανότητα $\lambda_{k-1}\Delta t$ αν $k > 0$
    - ➢ Μια αναχώρηση, με πιθανότητα $\mu_{k+1}\Delta t$ αν υπάρχει η κατάσταση $k+1$ (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού K μπορούμε να θεωρήσουμε $\mu_{k+1} = 0$)
    - ➢ Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα $1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta t$ αν $k > 0$ ή $1-\lambda_0\Delta t$ αν $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (***Chapman - Kolmogorov***) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
  - ➢ $\mathrm{P}_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t \mathrm{P}_{k-1}(t-\Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t \mathrm{P}_{k+1}(t-\Delta t) + [1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta \mathrm{t}]\mathrm{P}_k(\mathrm{t}-\Delta \mathrm{t})$
  - ➢ $\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t) = \mu_1 \Delta t\, \mathrm{P}_1(t-\Delta t) + (1-\lambda_0\Delta t)\, \mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t-\Delta t)$
  - ➢ με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k \mathrm{P}_k(t) = 1, \forall t$





ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/4)
Birth – Death Processes

Στο όριο, $\Delta t \approx dt \rightarrow 0$, $\frac{\mathrm{P}_k(t)-P_k(t-\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt}$ και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

- $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}\mathrm{P}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\mathrm{P}_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)\mathrm{P}_k(t),\ k > 0$
- $\frac{d\mathrm{P}_0(t)}{dt} = \mu_1\mathrm{P}_1(t) - \lambda_0\mathrm{P}_0(t)$
- με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_k \mathrm{P}_k(t) = 1, \forall t$

Όταν $t \rightarrow \infty$ και υπό ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παρέρχεται για ***επαναληπτικές*** καταστάσεις $n(t) = k$ (απείρως επισκέψιμες - ***positive recurrent***) ξεχνιέται η αρχική συνθήκη $\mathrm{P}_k(0)$ και οι $\mathrm{P}_k(t)$ συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες $P_k > 0$:

Για $t \rightarrow \infty$, $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = 0$, $\mathrm{P}_k(t) \rightarrow P_k > 0$: ***Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες***

Σημείωση: Ισχύει η ***εργοδική*** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν $P_k =$

$\lim_{\mathrm{T}\rightarrow\infty}\{\frac{\mathrm{T}_k}{\mathrm{T}}\}$ όπου T_k είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα όταν $n(t) = k$ σε μεγάλο χρονικό ορίζοντα

T ***μιας*** καταγραφής της ανέλιξης $n(t)$ σε ***ισορροπία***.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες ***Εξισώσεις Ισορροπίας***:

- $(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}\ ,\ k > 1$
- $\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$
- $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/4)

Birth – Death Processes

Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec: $\lambda_k = \lambda, \quad k = 0,1,2,3, \cdots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή $\mathrm{E}(s) = \frac{1}{\mu}$sec: $\mu_k = \mu, \ k = 1,2,3, \cdots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων $\mathrm{P}[n(t) = k] = \mathrm{P}_k(t)$ προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:
  - $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = \lambda \mathrm{P}_{k-1}(t) + \mu \mathrm{P}_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)\mathrm{P}_k(t), \ k > 0$
  - $\frac{d\mathrm{P}_0(t)}{dt} = \mu \mathrm{P}_1(t) - \lambda \mathrm{P}_0(t)$
  - με αρχικές συνθήκες $\mathrm{P}_k(0)$ και οριακές συνθήκες $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k(t) = 1 \ \forall t \geq 0$
- Στο όριο $t \to \infty$, $\frac{d\mathrm{P}_k(t)}{dt} = 0$, $\mathrm{P}_k(t) \to P_k > 0$, τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:
  - $\lambda P_0 = \mu P_1$ ή $P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$
  - $(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2$ ή $P_2 = \rho^2 P_0$ και γενικά $P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$
  - $P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$

Εφόσον $0 < \rho < 1$ η άπειρη δυναμοσειρά$(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots) \to \frac{1}{1-\rho} \ \Rightarrow \ P_0(\frac{1}{1-\rho}) = 1$ και

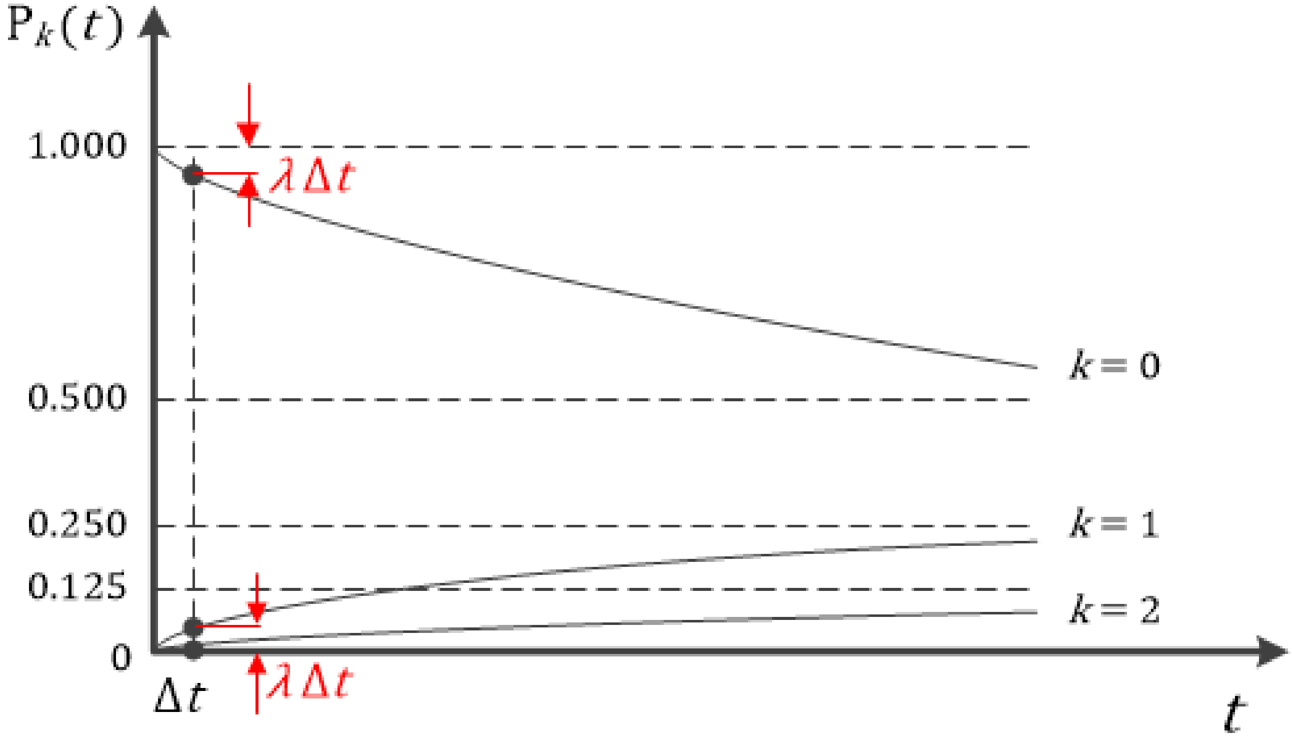
$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \qquad k > 0$$

Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: $E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (4/4)

Birth – Death Processes

Χρονική Εξέλιξη Πιθανοτήτων Κατάστασης Απλής Ουράς M/M/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \text{ Erlangs}$$

Αρχικές Συνθήκες: $P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0$

Οριακές Εργοδικες Πιθανότητες:

$$\lim_{t\to\infty} P_0(t) = P_0 = 1 - \rho = 0.500$$

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t) = P_1 = (1-\rho)\rho = 0.250$$

$$\lim_{t\to\infty} P_2(t) = P_2 = (1-\rho)\rho^2 = 0.125$$