ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems

Επισκόπηση Αναλυτικών Τεχνικών Θεωρίας Πιθανοτήτων για Εφαρμογή σε Ουρές Αναμονής M/G/1

Απόδειξη Τύπου Little
Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)
Βασικοί Ορισμοί Θεωρίας Ανανέωσης (Renewal Theory)
Υπολειπόμενη Ζωή (Residual Life, Renewal Paradox)
Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις (Moment Generating Functions – MGM)

Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr

30/5/2018

ΤΥΠΟΣ Little

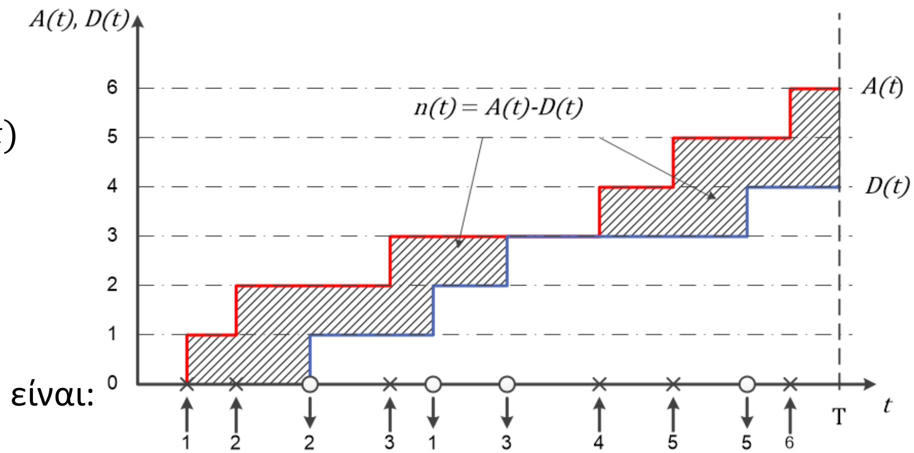
Γενικό Σύστημα Αναμονής σε Εργοδική Ισορροπία

Σε χρονικό ορίζοντα t:

$A(t)$: Συνολικός αριθμός αφίξεων στο διάστημα $(0, t)$

$D(t)$: Συνολικός αριθμός αναχωρήσεων στο διάστημα $(0, t)$

T_i : Χρόνος παραμονής στο σύστημα του πελάτη $i, i = 1, \cdots, D(t)$



Ο αριθμός πελατών στο σύστημα στο χρόνο t είναι:

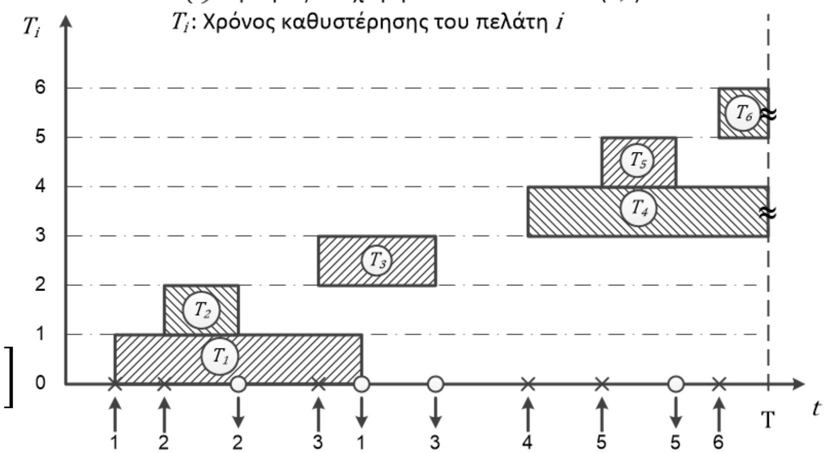
$$n(t) = A(t) - D(t)$$

Ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα στο διάστημα $(0, t)$ είναι:

$$\int_0^t n(\tau)d\tau \cong \sum_{i=1}^{D(t)} T_i$$

A(t): Αριθμός αφίξεων πελατών στο (0,*t*)
D(t): Αριθμός αναχωρήσεων πελατών στο (0,*t*)
T

T_i: Χρόνος καθυστέρησης του πελάτη i



Σε χρονικό ορίζοντα $\mathrm{T} \to \infty$ η ρυθμαπόδοση γ και ο χρόνος καθυστέρησης $\mathrm{E}(T)$ στην εργοδική κατάσταση είναι:

$$\gamma = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{D(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{E}(T) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\frac{1}{D(\mathrm{T})} \sum_{i=1}^{D(\mathrm{T})} T_i\right]$$

Λόγω εργοδικότητας:

$$\mathrm{E}[(n(t)] = \mathrm{E}(n) =$$

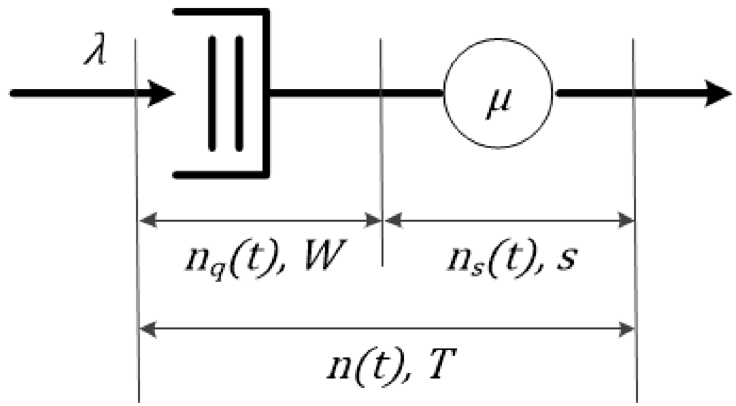
$$= \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} n(\tau)d\tau\right] = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{D(\mathrm{T})} T_i\right] = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\frac{D(\mathrm{T})}{\mathrm{T}} \times \frac{1}{D(\mathrm{T})} \sum_{i=1}^{D(\mathrm{T})} T_i\right]$$

Και τελικά:

$$\mathrm{E}(n) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{D(\mathrm{T})}{\mathrm{T}} \times \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \left[\frac{1}{D(\mathrm{T})} \sum_{i=1}^{D(\mathrm{T})} T_i\right] = \gamma \mathrm{E}(T)$$

ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΟΥΡΑΣ ΣΕ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΕΝΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΤΗ (G/G/1)

$$\gamma = \lambda(1 - \mathrm{P}\{\text{blocking}\}) = \mu\,\mathrm{P}\{n(t)>0\} \leq \lambda, \ \gamma < \mu$$



$$n(t) = n_q(t) + n_s(t), \qquad T = W + s$$

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mathrm{E}\{n(t)\}}{\gamma} = \mathrm{E}(W) + \mathrm{E}(s) = \frac{\mathrm{E}\{n_q(t)\}}{\gamma} + \frac{\mathrm{E}\{n_s(t)\}}{\gamma}$$

:

$$\mathrm{E}\{n_s(t)\} = \gamma \mathrm{E}(s) = \frac{\gamma}{\mu} = 0 \cdot \mathrm{P}\{n(t) = 0\} + \mathrm{P}\{n(t) > 0\} = \mathrm{P}\{n(t) > 0\}$$

$\Rightarrow$ ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή $u = \frac{\gamma}{\mu} = \mathrm{P}\{n(t) > 0\}$)

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (1/2) ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

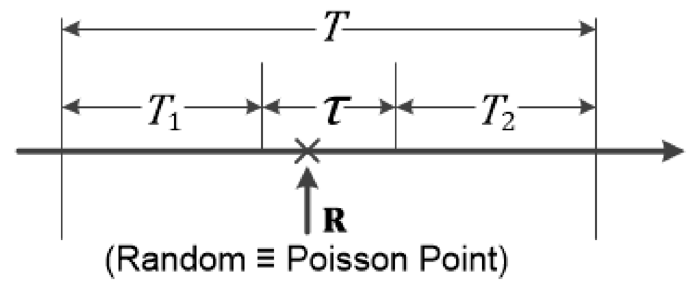
- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(A|n=k)\mathrm{P}(n=k)$$

  Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$\mathrm{P}(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(Y|X=x) f_X \, dx \,, \qquad \mathrm{E}(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(Y|X=x) f_X \, dx = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec



  Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$\mathrm{P}_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \; k=0,1,2,3,\cdots, \; \mathrm{E}_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$

  Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson $\mathbf{R}$ στο T με πιθανότητα $\mathrm{P}_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$\mathrm{P}\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [\mathrm{P}_0(T_1) \times \mathrm{P}_1(\tau) \times \mathrm{P}_0(T_2)]/\mathrm{P}_1(T) = \frac{\lambda\tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (2/2)
ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

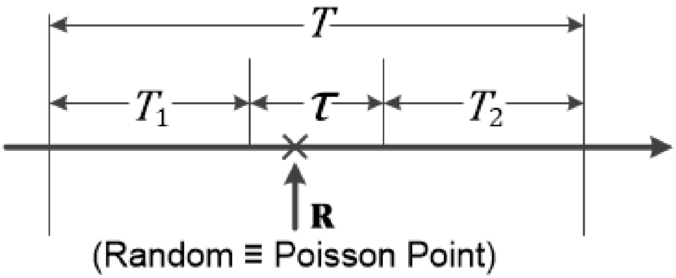
- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(A|n=k)\mathrm{P}(n=k)$$

Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλουυ Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X = x$:

$$\mathrm{P}(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(Y|X=x) f_X\, dx\,, \qquad \mathrm{E}(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}(Y|X=x) f_X\, dx = \mathrm{E}_X[\mathrm{E}(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec



Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$\mathrm{P}_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ k = 0,1,2,3,\cdots,\ \mathrm{E}_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$

Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson $\mathbf{R}$ στο T με πιθανότητα $\mathrm{P}_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$\mathrm{P}\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [\mathrm{P}_0(T_1) \times \mathrm{P}_1(\tau) \times \mathrm{P}_0(T_2)]/\mathrm{P}_1(T) = \frac{\lambda\tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

Οι αφίξεις Poisson έχουν τη συμπεριφορά τυχαίων αφίξεων **(Poisson Arrivals ~ Random Arrivals)**

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages): Η **εργοδική** κατανομή (και ο μέσος όρος) της κατάστασης S ουράς **M/G/N/K** (εφόσον υπάρχει) εκτιμάται σαν ο μακροχρόνιος λόγος του συνολικού χρόνου τ_S που η κατάσταση έχει την συγκεκριμένη τιμή S προς το συνολικό διάστημα παρατήρησης T. **Οι εκτιμήσεις αυτές μπορεί να προκύψουν από καταγραφή της κατάστασης σε χρονικά σημεία αφίξεων Poisson με ενιαίο ρυθμό** λ:

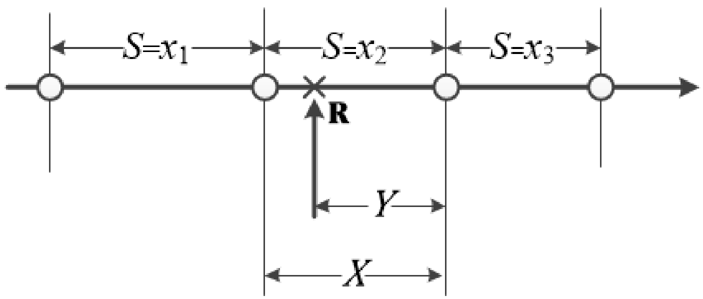
$$\mathrm{P}\{n(t) = S\} = \lim_{T\to\infty}\frac{\tau_S}{T} = \lim_{A\to\infty}\frac{A_S}{A} \cong \frac{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson όταν } n(t) = S, \text{στο συνολικό διάστημα } \tau_S}{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson στο συνολικό διάστημα } T}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΣΗΣ

Renewal Theory: Basic Definitions

- Στατιστικά Μοντέλα Χρόνου Ζωής (**Life-Time**), Αποτυχίας (**Failure-Times**), Αποκατάστασης (**Repair-Times**)
- Βασική παραδοχή: Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών Σημείων Ανανέωσης (**renewals** που ορίζουν το Χρόνο Ζωής) είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές S με τιμές $x \geq 0$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την ίδια κατανομή $F_S(x)$ (**i.i.d. - independent & identically distributed random variables**), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_S(x)$, μέση τιμή $\mathrm{E}(S)$ και διασπορά $\sigma_S^2 = \mathrm{E}(S^2) - [\mathrm{E}(S)]^2$:

$$\mathrm{P}\{S \in (x-dx, x)\} = f_S(x)dx, F_S(x) = \mathrm{P}(S \leq x) = \int_{t=0}^{x} f_S(t)dt,\ \ \mathrm{E}(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt,\ \ \mathrm{E}(S^2) = \int_{t=0}^{\infty} t^2 f_S(t)dt$$



- Ένας άσχετος παρατηρητής του συστήματος σε τυχαίο χρονικό σημείο $\mathbf{R}$ (**Random Point** που σύμφωνα με την ιδιότητα **PASTA** ισοδυναμεί με τυχαία άφιξη **Poisson**) έχει πιθανότητα να βρεθεί σε διάστημα X με προτίμηση ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος x. Η απόσταση Y από το σημείο αυτό μέχρι το επόμενο renewal αποτελεί τον Υπολειπόμενο Χρόνο Ζωής (**Residual Life**)
- **Renewal Paradox:** Η τυχαία μεταβλητή X (***το μέγεθος του διαστήματος τυχαίας επιλογής***) έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ διαφορετική από την $f_S(x)$

$$\mathrm{P}\{\mathbf{R} \in x \,|\, S{=}x\} = \mathrm{K} \cdot x$$ (***τυχαία επιλογή ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος*** x)

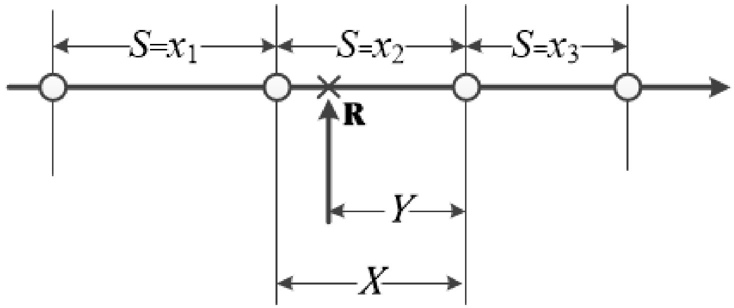
$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{t=0}^{x} \mathrm{P}\{\mathbf{R} \in t | S = t\} f_S(t)dt = \int_{t=0}^{x} \mathrm{K} \cdot t \cdot f_S(t)dt$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \mathrm{K} \cdot x \cdot f_S(x), \quad \int_{x=0}^{\infty} f_X(x)dx = 1 = \mathrm{K} \cdot \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x)dx \Rightarrow \mathrm{K} = 1/\mathrm{E}(S)$$ και τελικά

$$\boxed{f_X(x) = x f_S(x)/\mathrm{E}(S),\ \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(S^2)/\mathrm{E}(S)}$$

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ

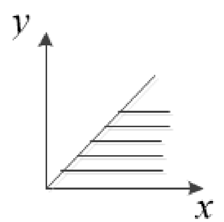
Residual Life & Renewal Paradox



- Επιλογή διαστήματος $X = x$ από παρατηρητή που εμφανίζεται σε σημείο Poisson **R**: $f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{\mathrm{E}(S)}$
- Ο Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής είναι τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$
- $\mathrm{P}\{Y \in (y-dy, y) \mid X{=}x\} = \frac{\mathrm{P}\{\mathbf{R} \in dy\}}{\mathrm{P}\{\mathbf{R} \in x\}} = \frac{\mathrm{K} \cdot dy}{\mathrm{K} \cdot x} = dy/x$
  και από τον τύπο της συνολικής πιθανότητας

$$\mathrm{P}\{Y \in (y-dy, y)\} = f_Y(y)dy = \int_{x=y}^{\infty} \frac{dy}{x} f_X(x)dx = \int_{x=y}^{\infty} \frac{f_S(x)}{\mathrm{E}(S)} dy\, dx = \frac{dy}{\mathrm{E}(S)} \int_{x=y}^{\infty} f_S(x)\, dx = \frac{1 - F_S(y)}{\mathrm{E}(S)} dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1 - F_S(y)}{\mathrm{E}(S)}$$



- Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (**Mean Residual Life**):

$$\mathrm{E}(Y) = \int_{y=0}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{y=0}^{\infty} y \frac{1 - F_S(y)}{\mathrm{E}(S)} dy = \frac{1}{\mathrm{E}(S)} \int_{y=0}^{\infty} \left\{ y \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx \right\} dy$$

$$= \frac{1}{\mathrm{E}(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \left\{ \int_{y=0}^{x} y\, dy \right\} dx = \frac{1}{\mathrm{E}(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x)\, \frac{x^2}{2} dx = \frac{\mathrm{E}(S^2)}{2\mathrm{E}(S)} = \frac{{\sigma_S}^2 + [\mathrm{E}(S)]^2}{2\mathrm{E}(S)}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(Y) = \frac{\mathrm{E}(S^2)}{2\mathrm{E}(S)} = \frac{{\sigma_S}^2 + [\mathrm{E}(S)]^2}{2\mathrm{E}(S)} \geq \frac{\mathrm{E}(S)}{2}}$$

Renewal Paradox: Τυχαία ενδιάμεση παρατήρηση R «προτιμά» κατά μέσο όρο μεγάλα διαστήματα S

- Για **σταθερά** διαστήματα S: $\mathrm{E}(S) = S = 1/\mu$, ${\sigma_S}^2 = 0$, $\mathrm{E}(Y) = S/2 = 1/(2\mu)$ και η μέση τιμή του «προτιμώμενου» διαστήματος είναι $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(S)$ (***αναμενόμενο***, χωρίς προκαταλήψεις λόγω απολύτως προβλέψιμου S)
- Για **εκθετικά** διαστήματα S: $\mathrm{E}(S) = 1/\mu$, ${\sigma_S}^2 = 1/\mu^2$, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(S) = 1/\mu$ (ιδιότητα ***έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής***) και $\mathrm{E}(X) = 2\mathrm{E}(S) = 2/\mu$ (***διπλάσιο της μέσης τιμής*** $\mathrm{E}(S)$ με προκατάληψη λόγω απρόβλεπτου S)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ & ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Moment Generating Functions - MGF

Διακριτές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές n με τιμές k = 0, 1, 2,… και πιθανότητες $p_{\boldsymbol{k}} = \mathrm{P}(n = k)$

- Ορίζουμε την **Ροπογεννήτρια Συνάρτηση** (MGF) σαν τον μετασχηματισμό $\boldsymbol{z}$

  $\mathbf{G}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, z^k, |z| \le 1,$
- Για $|z|$=1 , $\mathbf{G}_n(1) = 1$ και οι παράγωγοί της MGF ως προς z δίνουν τις ροπές της n:

  $\mathbf{G}_n(1)' = \mathrm{E}(n)$, $\mathbf{G}_n(1)^{(m)} = \mathrm{E}(n^m)$

Παράδειγμα: Αφίξεις Poisson k με ρυθμό λ σε διάστημα t με πιθανότητες $\mathrm{P}_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0,1,2,3,\cdots$

$$\mathbf{G}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}_k(t)\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}(\lambda t)^k / k! = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$\mathbf{G}_n(1) = 1,\ \mathbf{G}_n(1)' = \mathrm{E}(n) = \lambda t,\ \mathbf{G}_n(1)'' = \mathrm{E}(n^2) = \lambda t + (\lambda t)^2,\ \sigma_n^2 = \mathrm{E}(n^2) - [E(n)]^2 = \lambda t$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X με τιμές $t \ge 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$

$$\mathrm{P}\{X \in (t - \Delta t, t)\} = f_X(t)\Delta t, \qquad F_X(t) = \mathrm{P}(X \le t) = \int_{\tau=0}^{t} f_X(\tau)d\tau$$

- Ορίζουμε τον μετασχηματισμό ***Laplace*** $\mathbf{F}_X(p)$ της $f_X(t)$

  $\mathbf{F}_X(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f_X(t)dt$
- Για $p = 0$ έχουμε αντίστοιχα $\boldsymbol{F}_X(0) = 1$ και οι παράγωγοι ως προς p για $p = 0$ δίνουν τις ροπές της X:

  $\mathbf{F}_X(0)' = -\mathrm{E}(X)$, $\mathbf{F}_X(0)^{(m)} = (-1)^{\mathrm{m}}\mathrm{E}(X^m)$

Παράδειγμα: Εκθετική μεταβλητή X με μέσο όρο $1/\mu$, $f_X(t) = \mu e^{-\mu t}, t \ge 0$

$$\mathbf{F}_X(p) = \mu/(\mu + p)$$

$$\mathbf{F}_X(0) = 1,\ \mathbf{F}_X(p)' = -\mu/(\mu + p)^2,\ \mathrm{E}(X) = -\mathbf{F}_X(0)' = 1/\mu,\ \mathbf{F}_X(p)'' = 2\mu/(\mu + p)^3,\ \mathrm{E}(X^2) = \mathbf{F}_X(0)'' = 2/\mu^2$$

Παράδειγμα: X με σταθερή τιμή $1/\mu$, $f_X(t) = \delta(t - 1/\mu)$

$$\mathbf{F}_X(p) = e^{-p/\mu},\ \mathbf{F}_X(0) = 1,\ \mathbf{F}_X(p)' = -(1/\mu)e^{-p/\mu},\ \mathrm{E}(X) = -\mathbf{F}_X(0)' = 1/\mu$$

$$\mathbf{F}_X(p)'' = 1/\mu^2 e^{-p/\mu},\ \mathrm{E}(X^2) = \mathbf{F}_X(0)'' = 1/\mu^2,\ \sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = 0$$

- ***Άθροισμα ανεξαρτήτων*** τυχαίων μεταβλητών $\mathbf{F}_{X+Y}(p) = \mathbf{F}_X(p) \cdot \mathbf{F}_Y(p)$