

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Queuing Systems

Εφαρμογές Κλειστών Δικτύων Ουρών Markov:

- 1. Ανάλυση Window Flow Control σε Δίκτυα Υπολογιστών**
- 2. Αξιολόγηση Συστημάτων Πολύ-προγραμματισμού (Multitasking)**
- 3. Ανάλυση Μέσης Τιμής (Mean Value Analysis – MVA)**
- 4. Προσομοίωση Κλειστού Δικτύου Markov**
- 5. Γενίκευση Μοντέλων Μορφής Γινομένου (BCMP)**

Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

23/5/2018

ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL (1/2)

Παραδοχές:

- Κλειστό δίκτυο N περιφερομένων πελατών σε M διασυνδεόμενα υποσυστήματα (ουρές) Q_i εκθετικής εξυπηρέτησης σταθερού συνολικού αριθμού πελατών $N = \sum_{i=1}^M n_i$ όπου n_i ο αριθμός πελατών στο Q_i στην εργοδική κατάσταση: Τυχαία μεταβλητή $n_i = \lim_{t \rightarrow \infty} n_i(t)$
- Ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $i = 1, 2, \dots, M$ ρυθμού μ_i με παραδοχή **Kleinrock**
- Τυχαία Δρομολόγηση από υποσύστημα Q_i σε Q_j με πιθανότητα $p_{ij} = \text{Prob}\{i \rightarrow j\}$

Θεώρημα: Οι εργοδικές πιθανότητες της $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ έχουν **μορφή γινομένου**:

$$P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^M (X_i)^{n_i}$$

- Οι παράμετροι X_i είναι **ανάλογες** των βαθμών χρησιμοποίησης των ουρών i , κατ' αναλογία με τα $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ στα ανοικτά δίκτυα ουρών M/M/1 του Θεωρήματος **Jackson**
- Η ρυθμαπόδοση λ_j διαμέσου του Q_j είναι ανάλογη του $\mu_j X_j$. Οι X_j δεσμεύονται από γραμμικό σύστημα διατήρησης μέσω ρυθμών πελατών από δρομολόγηση άλλων Q_i :

$$\mu_j X_j = \sum_{i=1}^M \mu_i X_i p_{ij}, \quad j = 1, \dots, M$$

- Συνήθως ορίζουμε αυθαίρετα την τιμή της $X_1 = 1$ ώστε το ανωτέρω **γραμμικώς εξαρτημένο σύστημα εξισώσεων** να έχει μονοσήμαντη λύση για τις παραμέτρους X_j

Σημείωση: Στα ανοικτά δίκτυα **Jackson** οι εξωτερικές ροές εισόδου γ_i εγγυώνται τη γραμμική ανεξαρτησία των εξισώσεων διατήρησης μέσω ρυθμών πελατών

ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL (2/2)

- Η σταθερά $G(N)$, προκύπτει από την εξίσωση **κανονικοποίησης** (άθροισμα εργοδικών πιθανοτήτων για όλες τις πιθανές απείρως επισκέψιμες καταστάσεις - positive recurrent states - ίσο με μονάδα)
- Η $G(N)$ αντιστοιχεί στη **Συνάρτηση Κερματισμού – Partition Function** της Στατιστικής Μηχανικής. Ο υπολογισμός της απαιτεί την καταγραφή όλων των καταστάσεων $(n_1, n_2, \dots, n_M)$ συνδυασμών n_i που αθροίζουν σε N (στην γενικότητα του «δύσκολο» πρόβλημα). Στην περίπτωση μας λύνεται με τον Επαναληπτικό Αλγόριθμο του **Buzen** (επόμενη διαφάνεια)
- Οι οριακές πιθανότητες (**Marginal Probabilities**) για το υποσύστημα (ουρά) Q_i δίνονται από:

$$P(n_i = k) = \frac{X_i^k}{G(N)} [G(N - k) - X_i G(N - k - 1)]$$

- Ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή i δίνεται από

$$P(n_i \geq 1) = X_i G(N - 1) / G(N)$$

- Ο μέσος αριθμός πελατών στο υποσύστημα Q_i (μαζί με τον εξυπηρετούμενο) δίνεται από:

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ BUZEN (επανάληψη)

Πολυπλοκότητα $O(N \times M)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Buzen%27s_algorithm

Διαμόρφωση πίνακα $(N + 1) \times (M + 1)$ στοιχείων $g(n, m)$, $n = 0, 1, \dots, N$ και $m = 0, 1, \dots, M$:

$$g(n, m) \triangleq \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i}$$
$$= \sum_{(n_1 + \dots + n_m = n) \wedge (n_m = 0)}^n \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i} + \sum_{(n_1 + \dots + n_m = n) \wedge (n_m > 0)}^n \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i}$$

Επαναληπτική σχέση (Recurrence Relation): $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$

Αρχικές συνθήκες Επαναληπτικού Αλγορίθμου:

$$g(0, m) = 1, \quad m = 1, \dots, M \text{ και } g(n, 1) = (X_1)^n, \quad n = 0, \dots, N. \text{ Με } X_1 = 1 \Rightarrow g(n, 1) = 1$$

Η συνάρτηση κερματισμού (**Partition Function**) για κλειστό δίκτυο M ουρών και n πελατών ($n = 0, \dots, N$) δίνεται από την τελευταία στήλη του πίνακα $g(n, m)$:

$$G(n) = g(n, M), \quad n = 1, 2, \dots, N \text{ και } G(N) = g(N, M)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}, \quad P(n_i \geq 1) = X_i G(N-1) / G(N)$$

Για τον υπολογισμό των N στοιχείων της στήλης M του πίνακα $g(n, m)$ απαιτούνται $N \times M$ προσθέσεις και $N \times M$ πολλαπλασιασμοί: Πολυπλοκότητα $O(N \times M)$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

Θεώρημα Gordon-Newell για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

$$X_1 \mu_1 = X_2 \mu_2$$

$$X_1 = 1, X_2 = \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

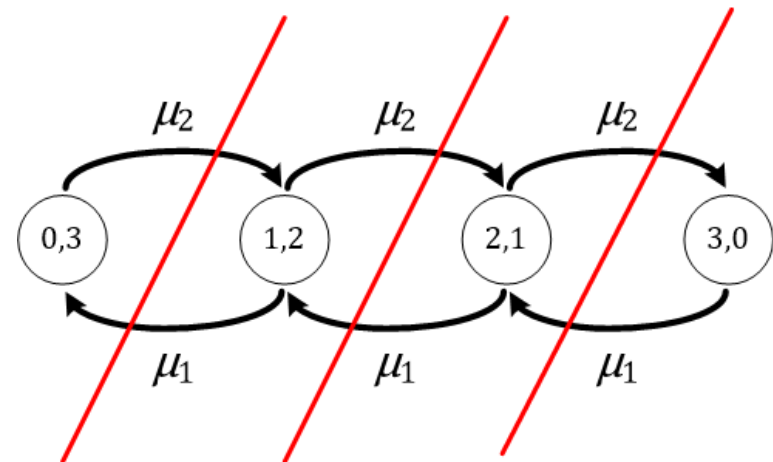
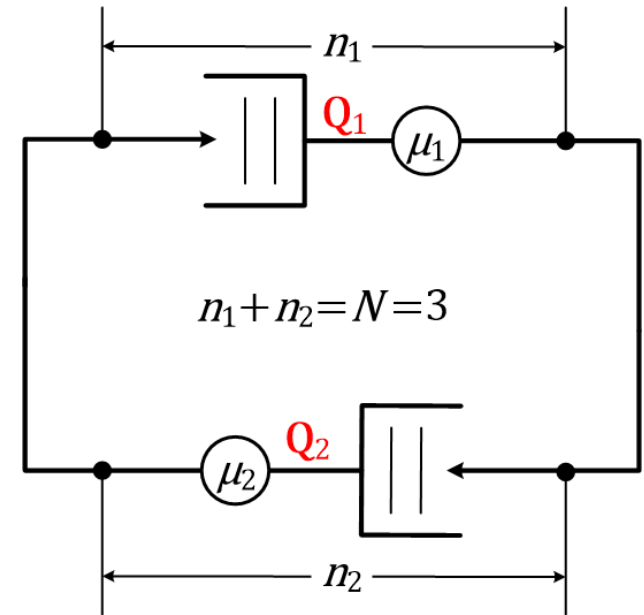
- $P(0,3) = X_2^3 / G(3) = \alpha^3 / G(3)$
- $P(1,2) = X_2^2 / G(3) = \alpha^2 / G(3)$
- $P(2,1) = X_2 / G(3) = \alpha / G(3)$
- $P(3,0) = 1 / G(3)$
- $1 / G(3) + \alpha / G(3) + \alpha^2 / G(3) + \alpha^3 / G(3) = 1$

$$\text{Άρα: } G(3) = 1 / (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$$

$$\gamma = \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_2 [1 - 1 / G(3)]$$

$$E(T_I) = E(n_I) / \gamma$$

- $E(n_1) = P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \frac{[a^2 + 2a + 3]}{G(3)}$
- $E(n_2) = P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \frac{[a + 2a^2 + 3a^3]}{G(3)}$
- $E(n_1) + E(n_2) = N = 3$



ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

Αλγόριθμος Buzen για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

Με βάση τον Επαναληπτικό Αλγόριθμο του **Buzen**

και $X_1 = 1, X_2 = \mu_1/\mu_2 = a$ ισχύει ότι:

$$g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$$

$$G(N) = g(N, M)$$

Προκύπτει :

$$G(1) = 1 + a$$

$$G(2) = 1 + a + a^2$$

$$G(3) = 1 + a + a^2 + a^3$$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2
0	1	a
1	1	$1 + a$
2	1	$1 + a + a^2$
3	1	$1 + a + a^2 + a^3$

Η χρησιμοποίηση της ουράς Q_1 είναι

$$\begin{aligned} P(n_i \geq 1) &= P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1 - P(0,3) = X_i G(N-1)/G(N) = X_1 G(2)/G(3) = \\ &= \frac{1+a+a^2}{1+a+a^2+a^3} \quad (\text{όπως και στη 2η διαφάνεια}) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$P(0,3) = a^3/G(3)$$

$$P(1,2) = a^2/G(3)$$

$$P(2,1) = a/G(3)$$

$$P(3,0) = 1/G(3)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}$$

$$E(n_1) = \sum_{k=1}^3 \frac{G(3-k)}{G(3)} = \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

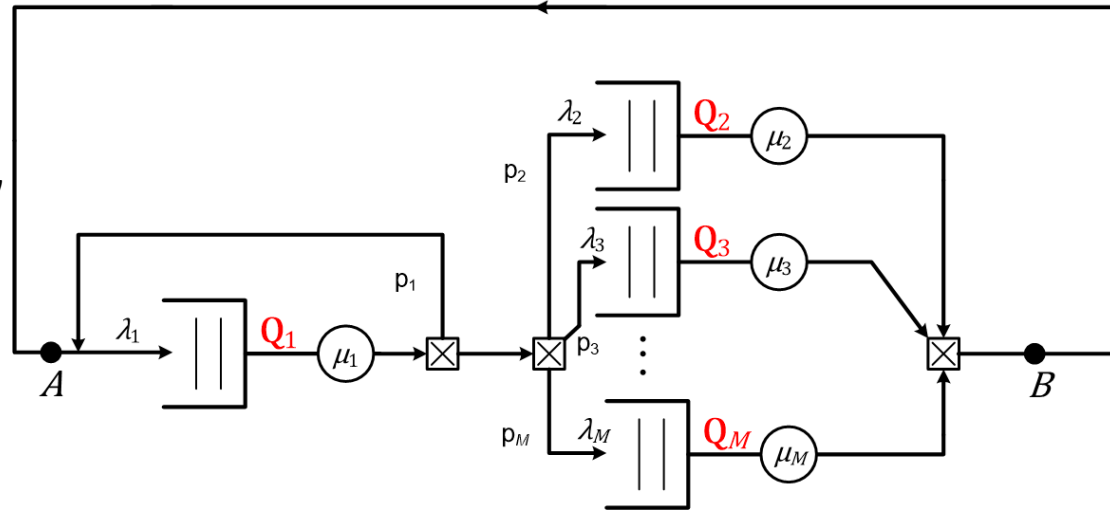
$$E(n_2) = \sum_{k=1}^3 X_2^k \frac{G(N-k)}{G(N)} = 3 - E(n_1) = \frac{a + 2a^2 + 3a^3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/2) (επανάληψη)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Κλειστό δίκτυο M εκθετικών ουρών Q_1 (CPU), $Q_2, \dots, Q_M$ (I/O)

Παράλληλη Επεξεργασία N προγραμμάτων (εντολών) με ανακύκλωση στη CPU (πιθανότητα $p_{11} = p_1$), επιλογή Υποσυστήματος I/O (με πιθανότητες $p_{12} = p_2, p_{13} = p_3, \dots, p_{1M} = p_M$) και απάντηση – δημιουργία νέας εντολής (εξωτερική ανάδραση).



Εφαρμογή Αλγορίθμου **Buzen** για $N = 1, 2, 3, 4$ πελάτες (παράλληλα προγράμματα) και $M = 3$ ουρές Q_1, Q_2, Q_3

$$\mu_1 X_1 = p_1 \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3$$

$$\mu_2 X_2 = p_2 \mu_1 X_1$$

$$\mu_3 X_3 = p_3 \mu_1 X_1$$

$$\text{Με } \mu_1 = \frac{1}{28} \text{ msec}^{-1}, \mu_2 = \frac{1}{40} \text{ msec}^{-1}, \mu_3 = \frac{1}{280} \text{ msec}^{-1},$$

$$p_1 = 0.1, p_2 = 0.7, p_3 = 0.2 \text{ και } X_1 = 1 \text{ προκύπτει πως } X_2 = 1, X_3 = 2$$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m-1) + X_m g(n-1, m)$ δίνει τον πίνακα δεξιά

$$\text{Οι σταθερές } G(N) = g(N, 3) \text{ αντιστοιχούν σε } N = 1, 2, 3, 4 \text{ προγράμματα}$$
$$G(1) = 4, \quad G(2) = 11, \quad G(3) = 26, \quad G(4) = 57$$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/2) (επανάληψη)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Οι αντίστοιχοι βαθμοί
χρησιμοποίησης U_1 της CPU (Q_1)
 $G(N)/G(N-1)$ είναι:

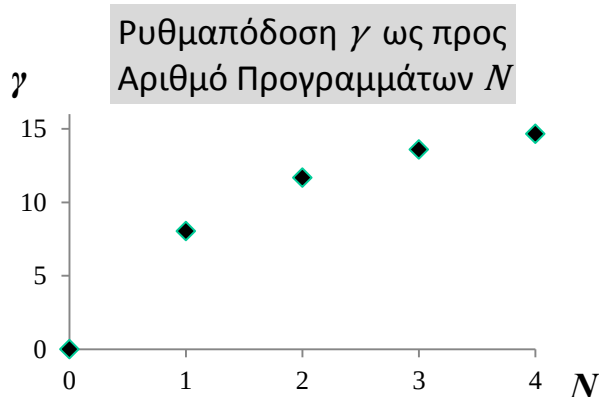
N	1	2	3	4
U_1	1/4	4/11	11/26	26/57

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}\gamma &= \mu_2 p(n_2 \geq 1) + \mu_3 p(n_3 \geq 1) \\ &= \mu_2 X_2 G(N-1)/G(N) + \mu_3 X_3 G(N-1)/G(N) \\ &= (\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) G(N-1)/G(N)\end{aligned}$$

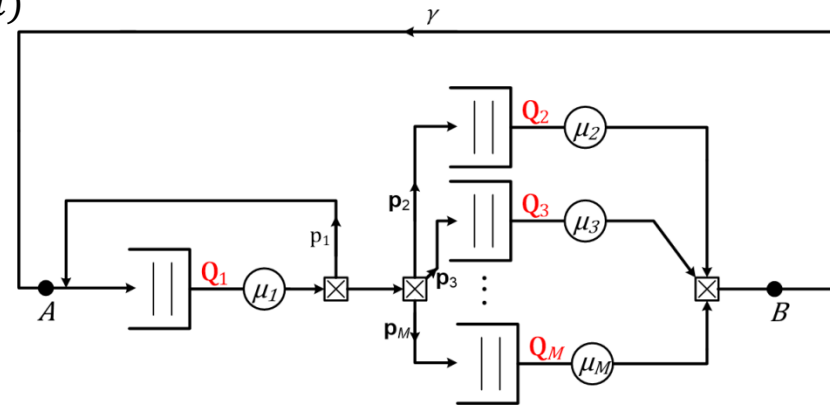
Οι αντίστοιχες τιμές σε προγράμματα/sec είναι:

N	1	2	3	4
γ	8.04	11.69	13	14.66



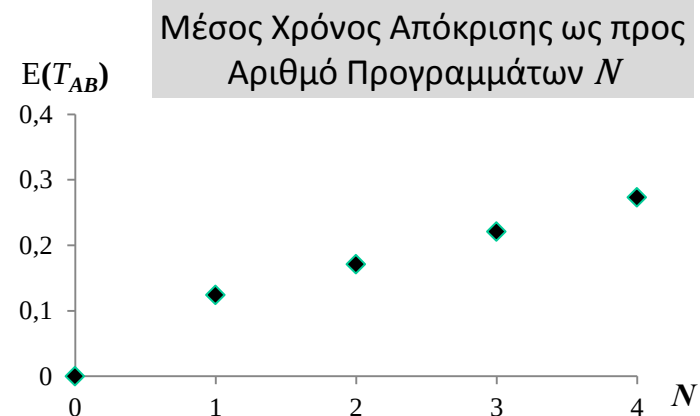
Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57



Ο μέσος χρόνος απόκρισης είναι $E(T_{AB}) = N/\gamma$
Οι αντίστοιχες τιμές σε sec είναι:

N	1	2	3	4
$E(T_{AB})$	0.124	0.171	0.221	0.273



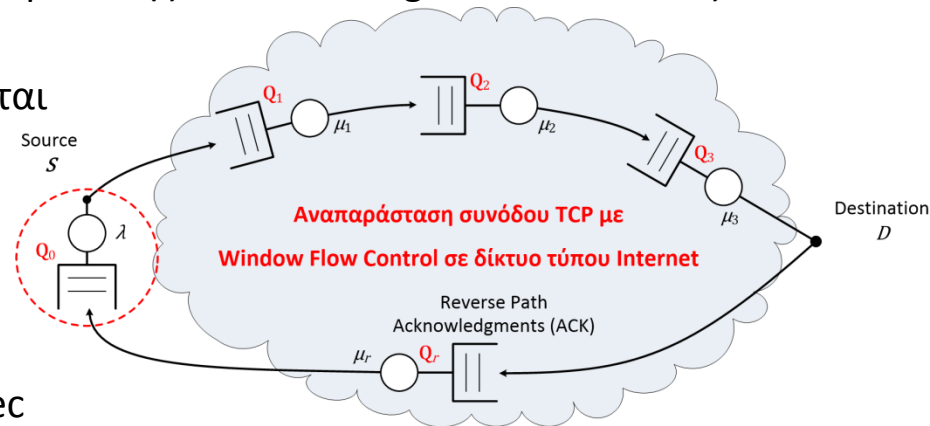
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (1/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου W

Αναπάρασταση Μηχανισμού Ελέγχου Ροής Παραθύρου (**Window Flow Control**) μέσω Κλειστού Δικτύου M ανεξαρτήτων εκθετικών ουρών και W πελατών. Η μορφή των πελατών εναλλάσσεται ανάμεσα σε πακέτα δεδομένων, μηνύματα επιβεβαίωσης – acknowledgments και άδειες εκπομπής – tokens

Το κλειστό δίκτυο του παραδείγματος αποτελείται από $M = 5$ υποσυστήματα:

- Q_0 : Αποθηκεύει τα Tokens στην πηγή (Source) με τον μηχανισμό Window Flow Control και αποστέλλει στον προορισμό (Destination) νέα πακέτα ανά χρονικά διαστήματα μέσης τιμής $1/\lambda$ sec (μοντέλο δημιουργίας κίνησης λ πακέτα/sec) εφόσον υπάρχουν διαθέσιμα tokens στην Q_0
- Q_1, Q_2, Q_3 : Ενδιάμεσοι δικτυακοί κόμβοι μεταγωγής πακέτου με μέσους εκθετικούς ρυθμούς μ_1, μ_2, μ_3 πακέτα/sec
- Q_r : Ισοδύναμο μοντέλο καθυστέρησης για την δημιουργία και μεταβίβαση μηνυμάτων επιβεβαίωσης – ACK σαν ανεξάρτητη ουρά με μέσο εκθετικό ρυθμό μ_r πακέτα/sec (θεωρούμε κατά προσέγγιση $1/\mu_r \cong 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3$ sec)

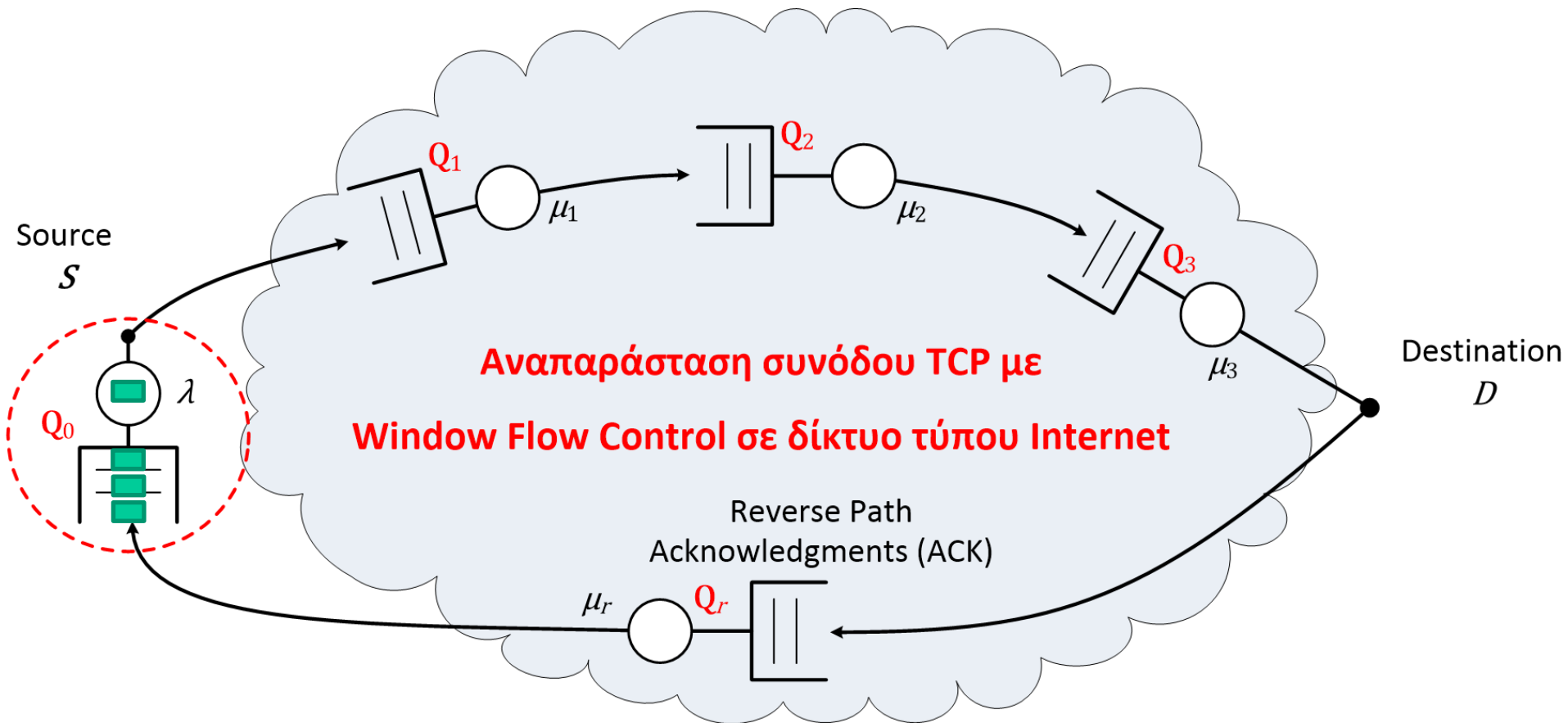


Στο κλειστό δίκτυο υπάρχουν ανά πάσα στιγμή $W \leq 8$ πελάτες που αντιστοιχούν στο μέγεθος παραθύρου – Window Size: $W = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_r$

Θεωρούμε πως ισχύουν οι παραδοχές για μορφή γινομένου του θεωρήματος **Gordon – Newell** και εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του **Buzen** για $W = 1, \dots, 8$ πελάτες που κυκλοφορούν σε $M = 5$ ουρές, ως προς την ρυθμαπόδοση γ και την μέση καθυστέρηση πακέτου από άκρο σε άκρο (S σε D) στο δίκτυο $E(T_{S,D}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma$

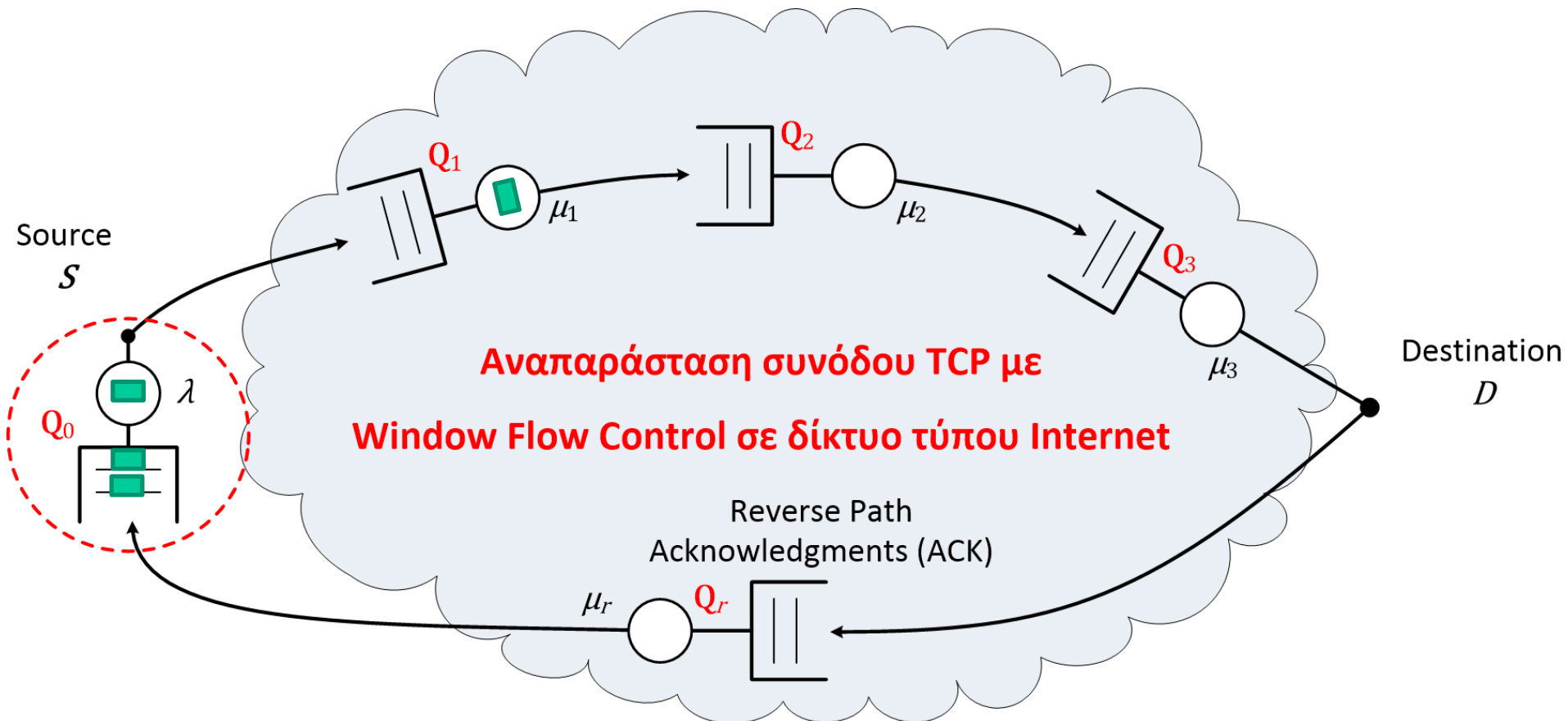
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (2/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



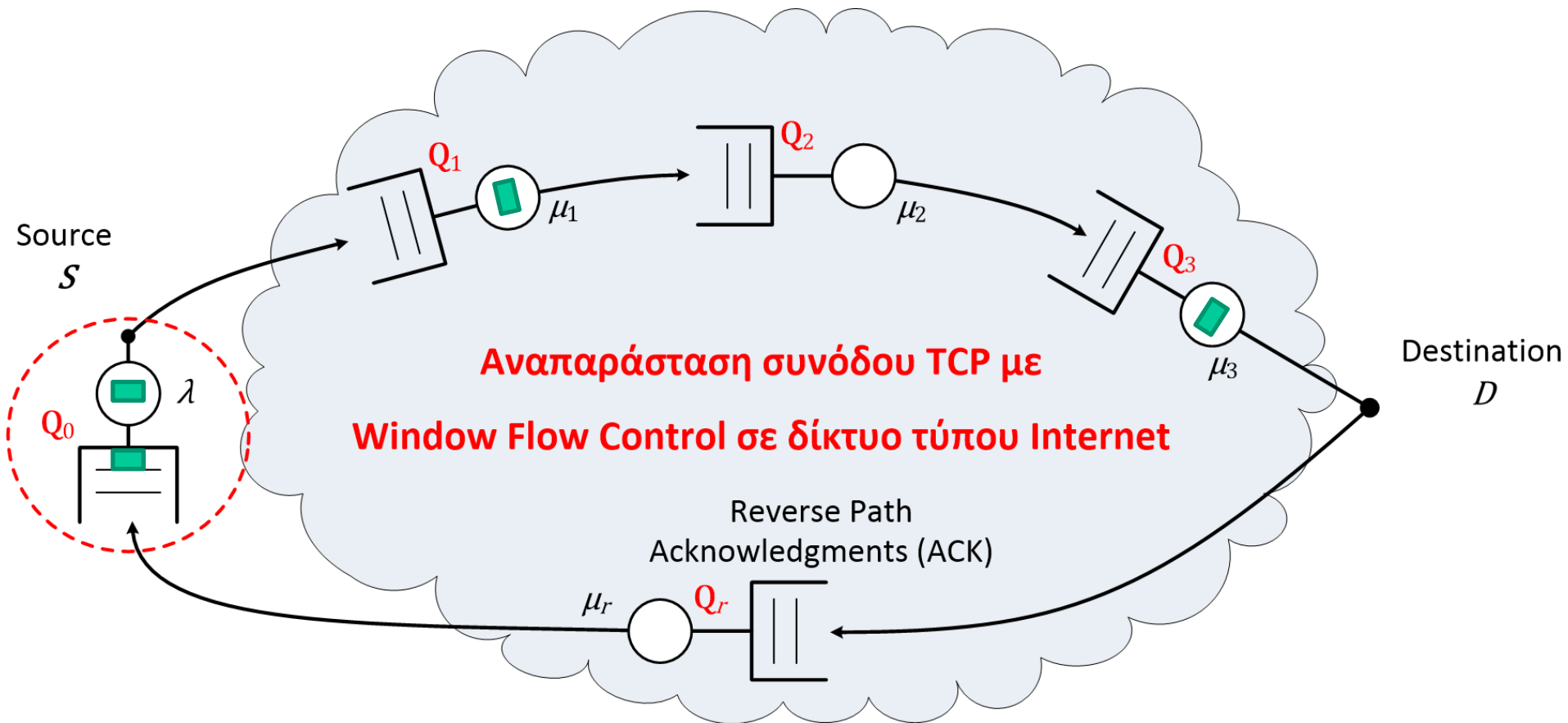
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (3/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



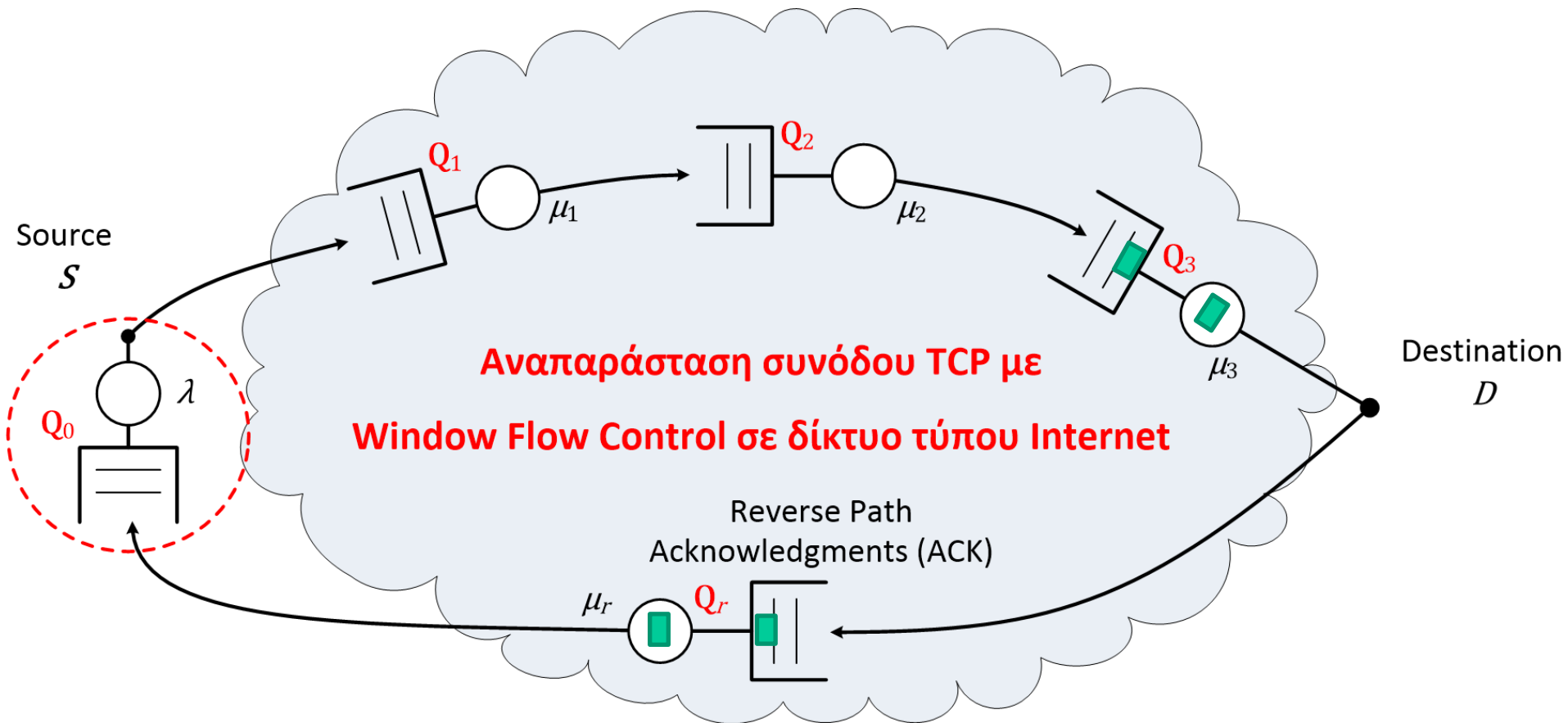
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (4/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



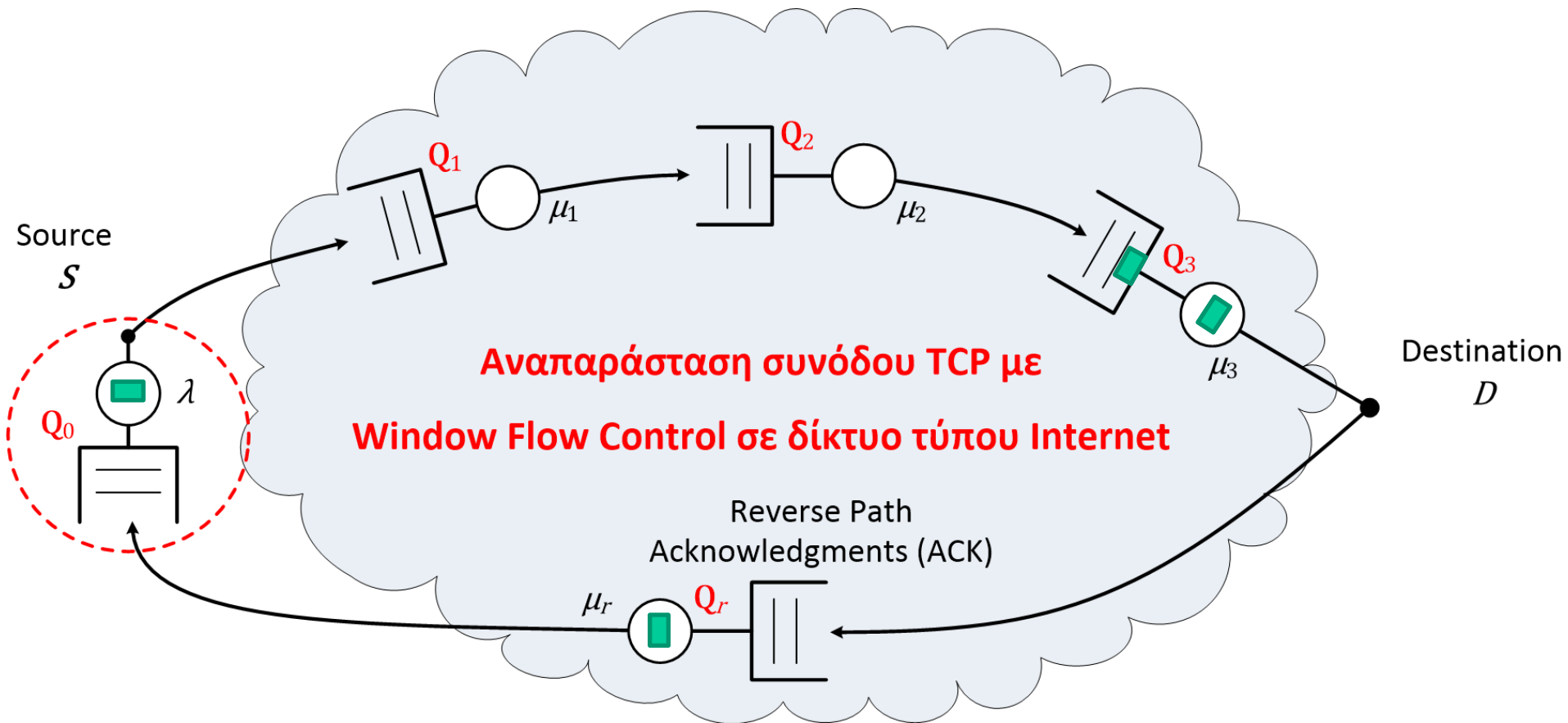
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (5/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



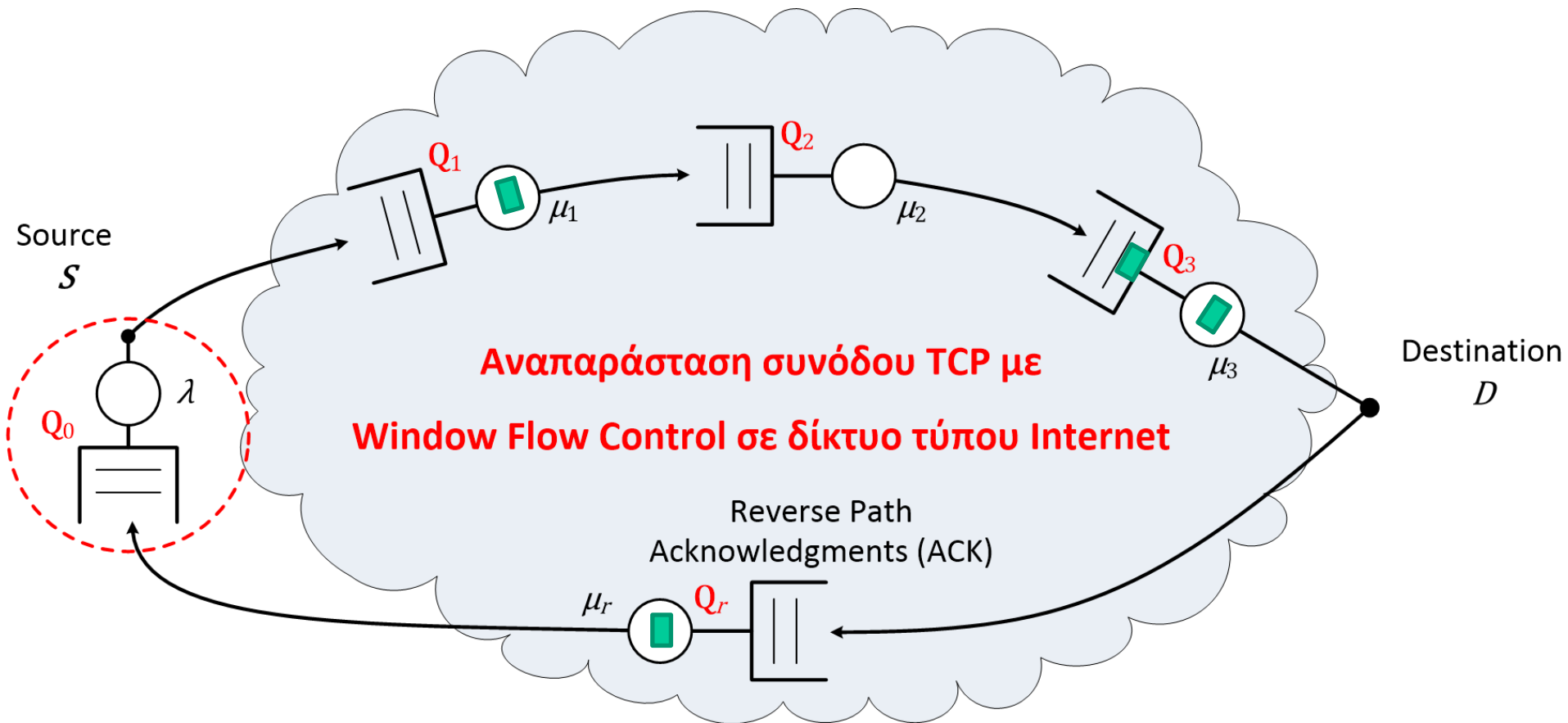
ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (6/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (7/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W=4$



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (8/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 4$

Υποθέτουμε πως $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$ πελάτες/sec

$$\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = \frac{3}{2} \text{ sec ή } \mu_r = 2/3 \text{ πελάτες/sec}$$

Με $X_0 = 1$ έχουμε:

$$\lambda X_0 = \mu_1 X_1 = \mu_2 X_2 = \mu_3 X_3 = \mu_r X_r$$

$$\text{Άρα: } X_1 = X_2 = X_3 = 0.5, X_r = 3/2$$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m-1) + X_m g(n-1, m)$
δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές $G(W) = g(W, 5)$ αντιστοιχούν σε $W = 1, \dots, 8$

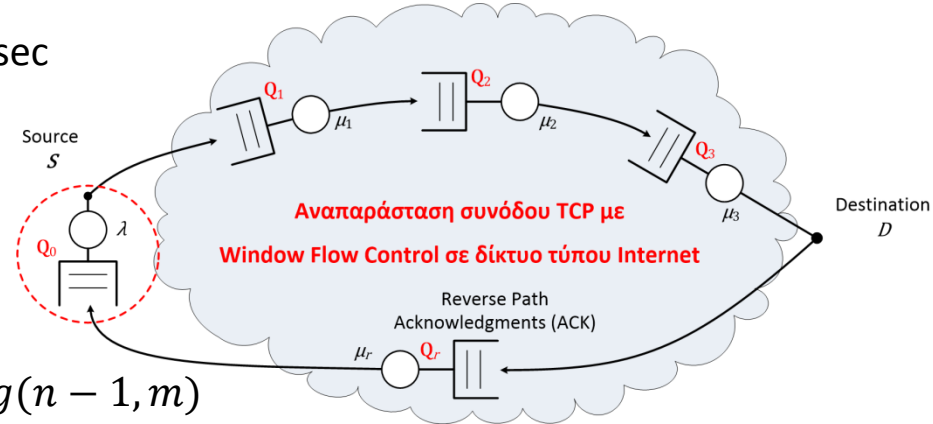
Η ρυθμαπόδοση του συστήματος γ σε πακέτα/sec είναι:

$$\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1) = \mu_1 X_1 G(W-1)/G(W)$$

Η μέση καθυστέρηση πακέτων σε sec από το S στο D είναι

$$E(T_{SD}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma, \text{ όπου}$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}$$



Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

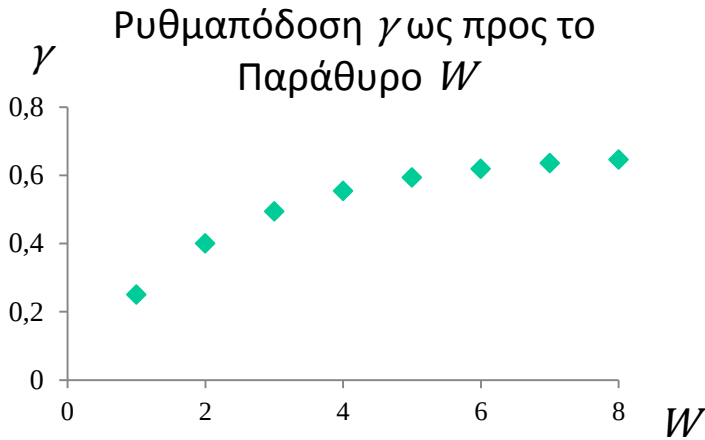
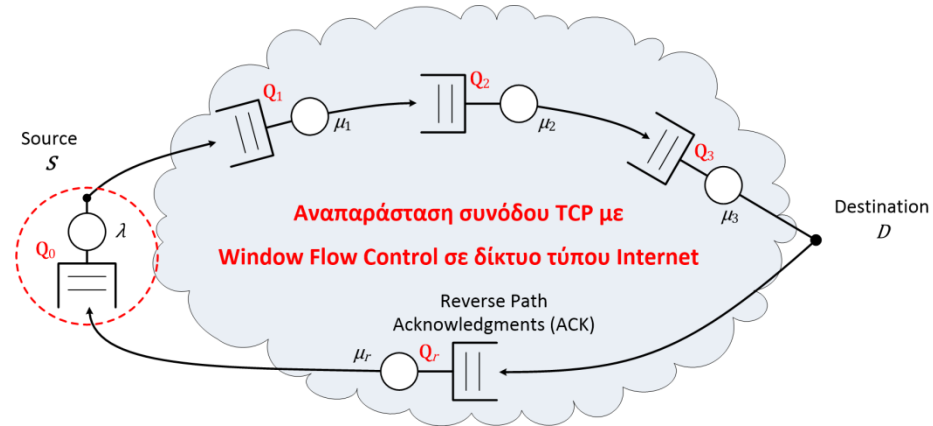
W	X_1	X_2	X_3	X_4	X_r
0	1	1	1	1	1
1	1	1.5	2	2.5	4
2	1	1.75	2.75	4	10
3	1	1.88	3.25	5.25	20.25
4	1	1.94	3.56	6.19	36.56
5	1	1.97	3.75	6.84	61.69
6	1	1.98	3.86	7.28	99.81
7	1	1.99	3.92	7.56	157.28
8	1	1.99	3.96	7.74	243.66

ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (9/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

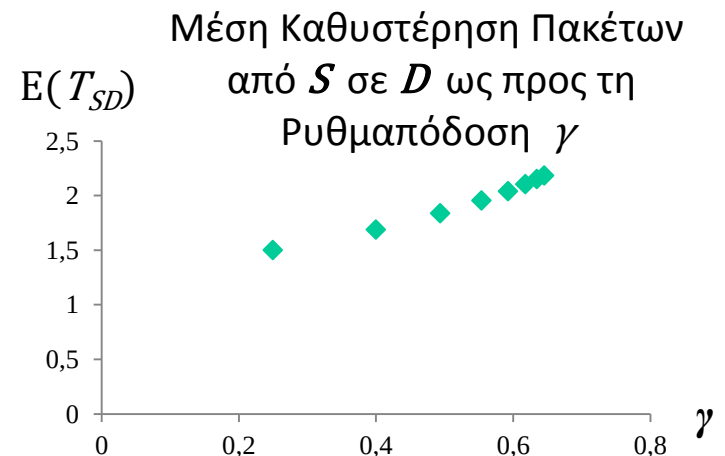
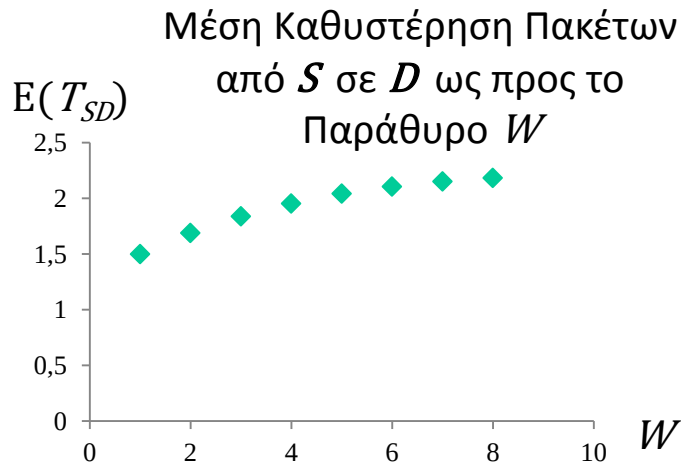
Ρυθμαπόδοση του συστήματος, $\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1)$:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
γ	0.25	0.4	0.49	0.55	0.59	0.62	0.63	0.65



Μέση καθυστέρηση πακέτου από το S στο D , $E(T_{SD})$:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	1.5	1.69	1.84	1.95	2.04	2.1	2.15	2.18



ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (10/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

Σενάριο Συμφόρησης

Υποθέτουμε πως $\lambda = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/2$ πελάτες/sec

$1/\mu_r = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3 = 6$ sec ή $\mu_r = 1/6$

(ανεπαρκείς ταχύτητες γραμμών $\Rightarrow$ **συμφόρηση**)

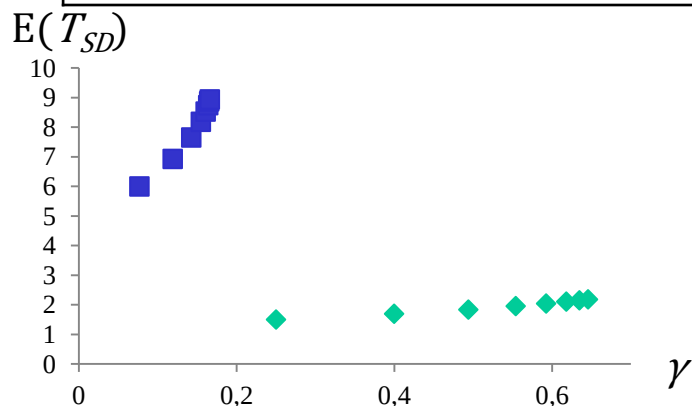
Έχουμε $X_0 = 1$, $X_1 = X_2 = X_3 = 2$, $X_r = 6$

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος γ είναι:

W	1	2	3	4	5	6	7	8
γ	0.077	0.119	0.142	0.155	0.161	0.164	0.165	0.166

Η μέση καθυστέρηση πακέτων $E(T_{SD})$ είναι:

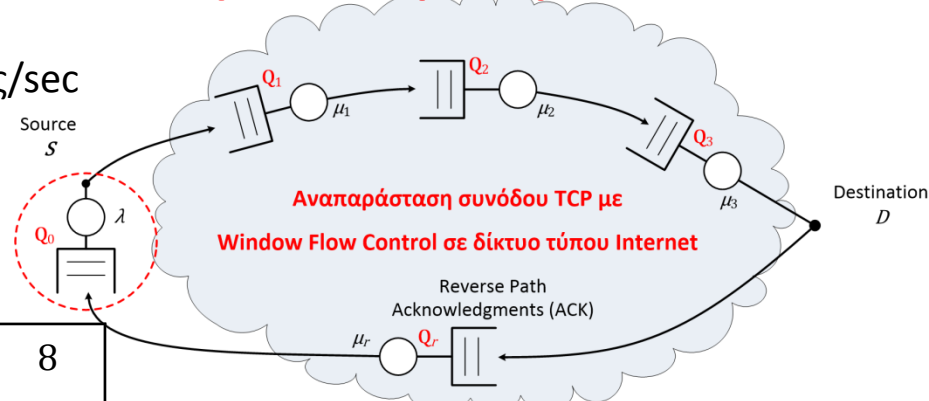
W	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	6	6.92	7.65	8.18	8.53	8.75	8.87	8.94



Σύγκριση Επίδοσης Σεναρίων για Αυξανόμενες τιμές του W

■ Συμφόρηση στο Δίκτυο ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.5, \lambda = 1$)

◆ Δίκτυο με καλή επίδοση ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2, \lambda = 1$)



Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

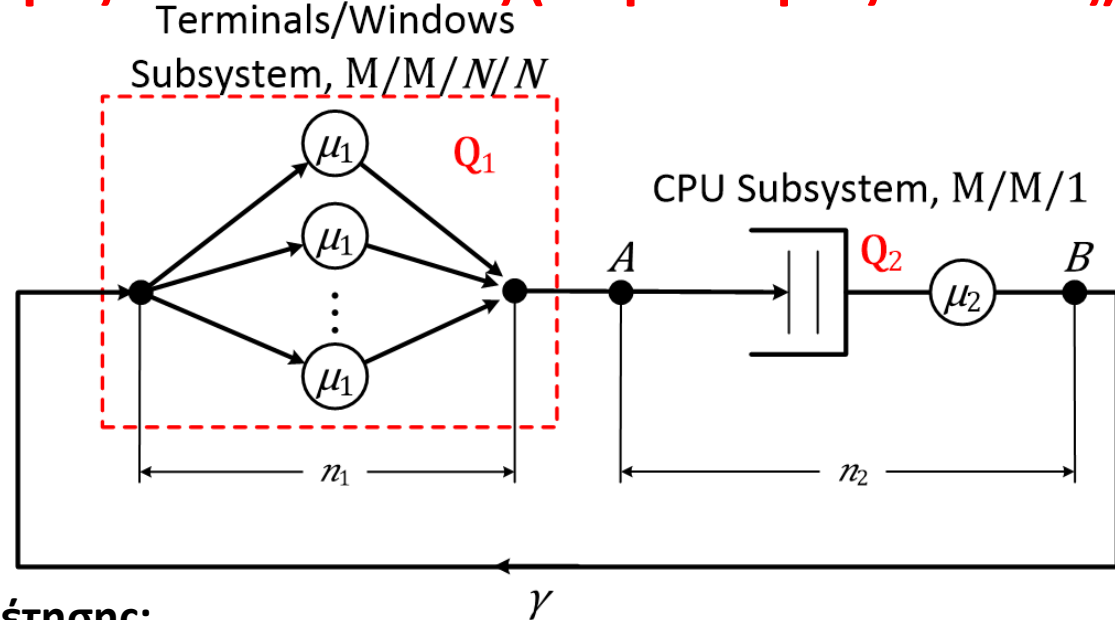
W	X_0	X_1	X_2	X_3	X_r
0	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	13
2	1	7	17	31	109
3	1	15	49	111	765
4	1	31	129	351	4941
5	1	63	321	1023	30669
6	1	127	769	2815	186829
7	1	255	1793	7423	1128397
8	1	511	4097	18943	6789325

Στην περίπτωση συμφόρησης, ανεκτή καθυστέρηση απαιτεί μικρές τιμές του W με σημαντικούς περιορισμούς ωφέλιμης ρυθμαπόδοσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (1/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

Το μοντέλο θεωρεί N πελάτες που περιφέρονται σε κλειστό δίκτυο. Εναλλάσσονται σε δύο υποσυστήματα, είτε με τη μορφή σκέψης ενός «χρήστη» (τερματικό ή ενεργό παράθυρο) για την παραγωγή (**input**) νέας εντολής, ή με τη μορφή επεξεργασίας εντολών που έχουν κατατεθεί και αναμένεται η απόκριση (**output**) στον «χρήστη»



Μοντέλα 2 Υποσυστημάτων Εξυπηρέτησης:

- **Υποσύστημα Παραγωγής Εντολών:** Q_1 , M/M/ ∞ (ή M/M/N/N) με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης (**Thinking Time**, T_{TH}) μέσης τιμής $E(T_{TH}) = 1/\mu_1$
Ο χρόνος T_{TH} αντιστοιχεί με τον χρόνο «σκέψης» για την σύνταξη μιας νέας εντολής εισόδου (**input**) σε συνέχεια της απόκρισης (**output**) από προηγούμενη εντολή
- **Υποσύστημα Επεξεργασίας Εντολών:** Q_2 , M/M/1 με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης $1/\mu_2$ και μέσο χρόνο καθυστέρησης (**Processing Time**, T_{PR}) μέσης τιμής $E(T_{PR})$
Η ουρά Q_2 αντιστοιχεί με το συνολικό σύστημα επεξεργασίας εντολών (CPU, I/O) σαν συναθροισμένο ισοδύναμο μοντέλο (**aggregate equivalent**, γενικεύεται σαν **Ισοδύναμο Norton**)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (2/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

Ανάλυση Κλειστού Δικτύου Markov

Εργοδικές Καταστάσεις

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2), n_1 + n_2 = N$$

Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\mu_2 P(0, N) = \mu_1 P(1, N - 1)$$

$$\mu_2 P(k, N - k) = (k + 1) \mu_1 P(k + 1, N - k + 1)$$

$$\mu_2 P(N - 1, 1) = N \mu_1 P(N, 0)$$

$$\text{Αν } a \triangleq \mu_2 / \mu_1 \Rightarrow P(k, N - k) = P(0, N) \frac{a^k}{k!}$$

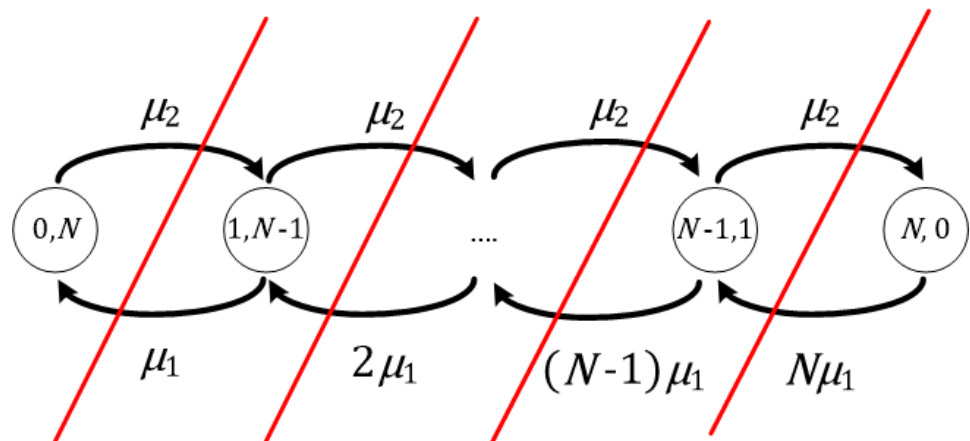
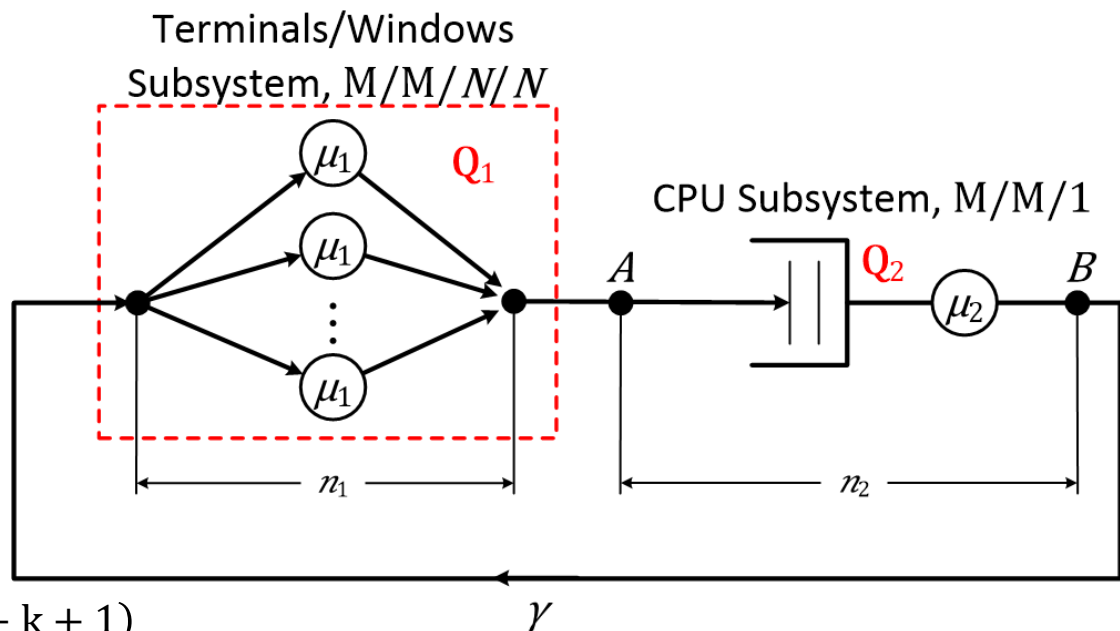
$$\text{και } P(k, N - k) = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{n=0}^N \frac{a^n}{n!}}$$

Υπολογισμοί όπως για Erlang-B:

$$P(N, 0) = B(a, N), P(N - 1, 1) = N \mu_1 B(a, N), \dots$$

$$E(n_2) = \sum_{k=1}^N k P(N - k, k) \text{ και η ρυθμαπόδοση } \gamma = \mu_2 [1 - P(N, 0)] \text{ εντολές/sec}$$

$$\text{Η Μέση Καθυστέρηση Εντολών στο Υποσύστημα Επεξεργασίας είναι } E(T_{PR}) = E(n_2) / \gamma \text{ sec}$$

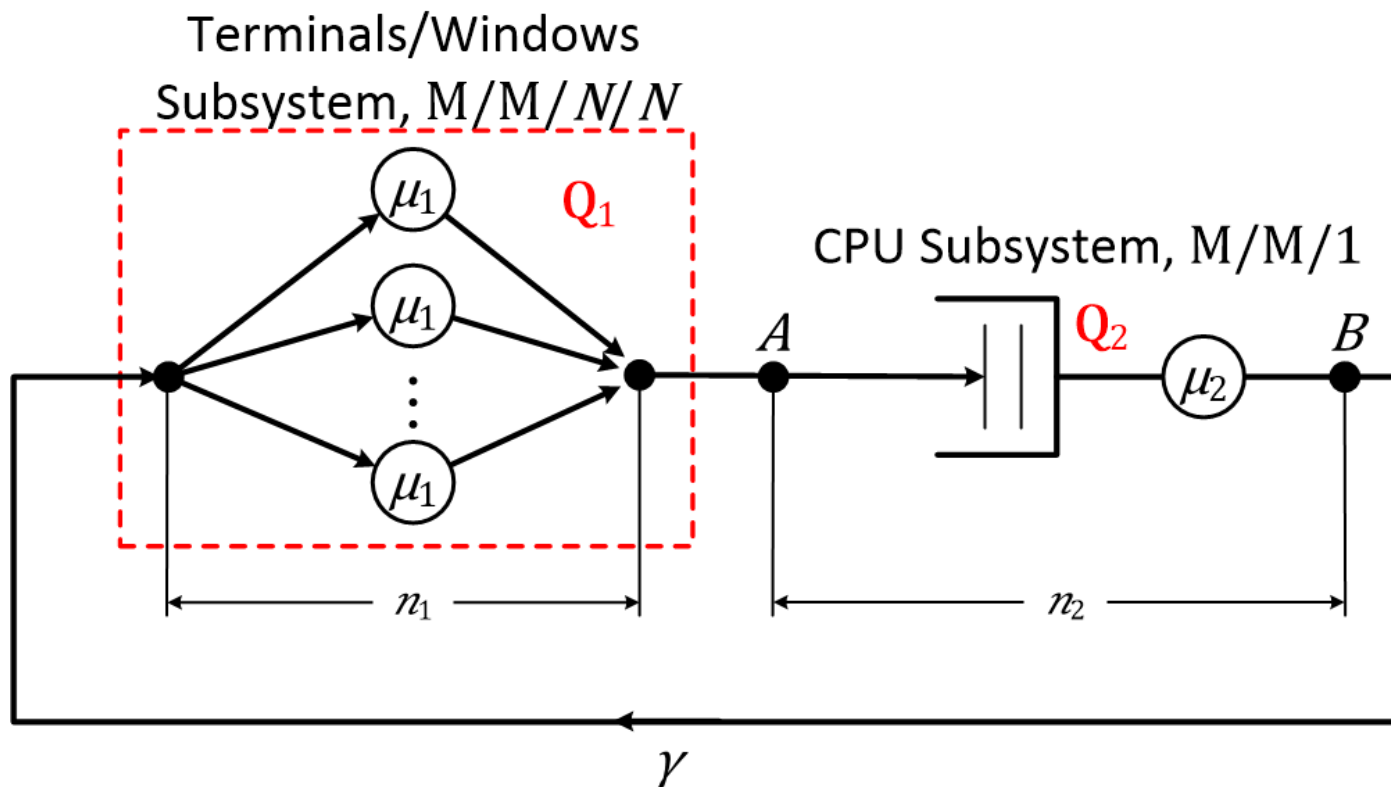


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (3/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

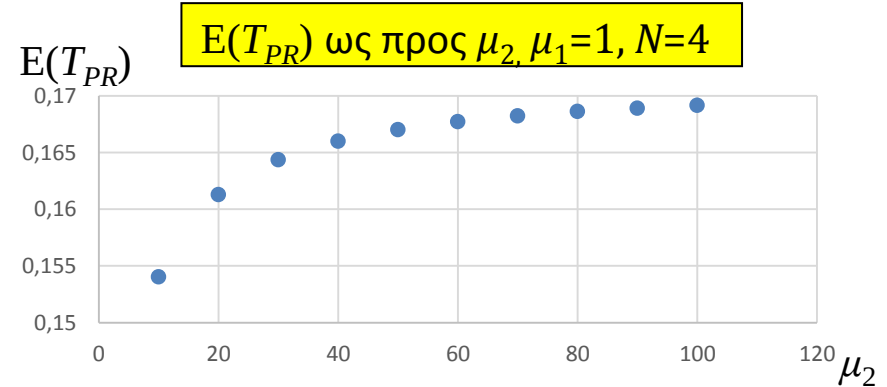
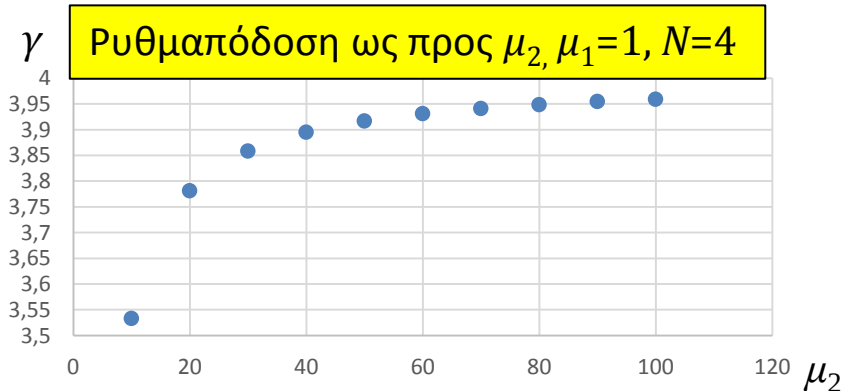
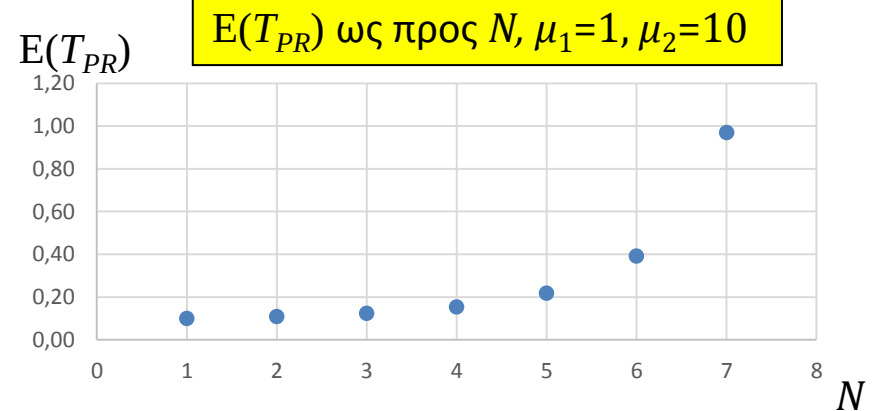
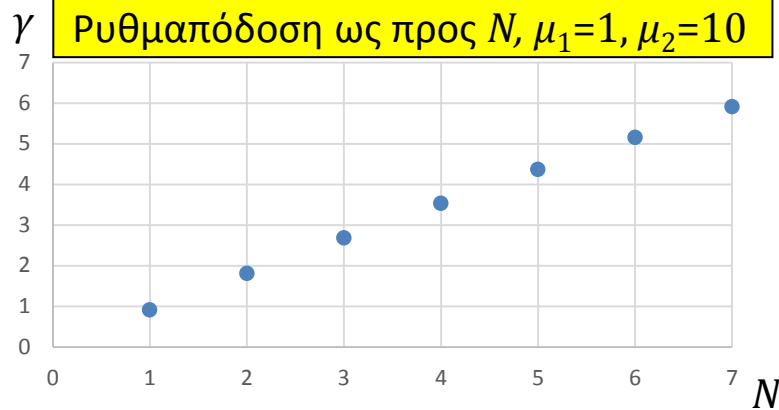
Αριθμητικά Αποτελέσματα:

Εφαρμογή της ανάλυσης για τιμές των $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$ ($\alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$) και μεταβάλλοντας τις δυνατότητες παραλληλισμού (Βαθμός Πολύ-προγραμματισμού, **Degree of Parallelism - Multitasking**) $N = 1, \dots, 7$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (4/4)

Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και N Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)



Συμπεράσματα:

1. Για αυξανόμενο βαθμό πολύ-προγραμματισμού N αναμένεται βελτίωση της Ρυθμαπόδοσης γ προς ένα μέγιστο όριο, με παράλληλη αύξηση της Μέσης Καθυστέρησης Επεξεργασίας Εντολών $E(T_{PR})$

2. Όσο μειώνεται ο Μέσος Χρόνος Σκέψης $E(T_{TH}) = 1/\mu_1 \rightarrow 0$ των χρηστών για $N = 4$ βελτιώνεται η Ρυθμαπόδοση γ και αυξάνεται η Μέση Καθυστέρηση Επεξεργασίας Εντολών, συγκλίνοντας προς τα αποτελέσματα ουράς M/M/1 ρυθμού εισόδου γ και ρυθμού εξυπηρέτησης μ_2 : $E(T_{PR}) \rightarrow \frac{1/\mu_2}{1-\gamma/\mu_2} \cong 0.166$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

MEAN VALUE ANALYSIS - MVA (1/5)

1. *Mean Value Analysis of Closed Multichain Queuing Networks*, M. Reiser & S.S. Lavenberg, Journal of the ACM 27 (2), 1980 (<https://dl.acm.org/citation.cfm?doid=322186.322195>)
2. *Wikipedia* https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_analysis

Παραδοχές:

- Κλειστό δίκτυο από M διασυνδεδεμένα υποσυστήματα (ουρές) $Q_i, i = 1, 2, \dots, M$ στην εργοδική κατάσταση, έκαστο με $n_i(k)$ πελάτες και ρυθμαπόδοση συστήματος $\gamma(k)$ πελάτες/sec ανά περιφορά πελάτη, όταν περιφέρονται στο δίκτυο $k = 1, 2, \dots, N$ πελάτες
- Ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $i = 1, 2, \dots, M$ μέσου ρυθμού μ_i με παραδοχή **Kleinrock**
- Τυχαία Δρομολόγηση από υποσύστημα Q_i σε Q_j με πιθανότητα $p_{ij} = \text{Prob}\{i \rightarrow j\}$. Η δρομολόγηση ορίζει τους μέσους ρυθμούς πελατών (ρυθμαποδόσεις) $\lambda_i(k)$ στα υποσυστήματα Q_i σαν το γινόμενο της συνολικής ρυθμαπόδοσης $\gamma(k)$ και του μέσου αριθμού επισκέψεων v_i ενός πελάτη στο Q_i ανά περιφορά του στο συνολικό σύστημα :
$$\lambda_i(k) = v_i \cdot \gamma(k)$$

Θεώρημα Αφίξεων σε Κλειστά Δίκτυα Εκθετικών Ουρών:

Πελάτης που αφικνείται σε υποσύστημα εξυπηρέτησης Q_i κλειστού δικτύου ανεξαρτήτων εκθετικών εξυπηρετήσεων συνολικού αριθμού πελατών N παρατηρεί την εργοδική κατάσταση ισορροπίας του δικτύου όπως προκύπτει με $N - 1$ πελάτες (**βλέπει το σύστημα όπως θα ισορροπούσε χωρίς τη παρουσία του**)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

MEAN VALUE ANALYSIS - MVA (2/5)

Αναδρομικός Αλγόριθμος:

Έστω:

- $E[n_i(k)]$: Μέσος όρος πελατών στο Q_i με $k = 1, 2, \dots, N$ πελάτες στο δίκτυο

Έχουμε

- Μέση καθυστέρηση πελατών στο Q_i : $E[T_i(k)]$
 $E[n_i(k)] = E[T_i(k)] \cdot \lambda_i(k)$ (τύπος **Little** ανά υποσύστημα Q_i)
- Συνολική μέση καθυστέρηση περιφοράς πελάτη $\sum_{i=1}^M v_i \cdot E[T_i(k)]$:
- Συνολική ρυθμαπόδοση $\gamma(k) = \frac{k}{\sum_{i=1}^M v_i \cdot E[T_i(k)]}$ (τύπος **Little** για το δίκτυο με k πελάτες)

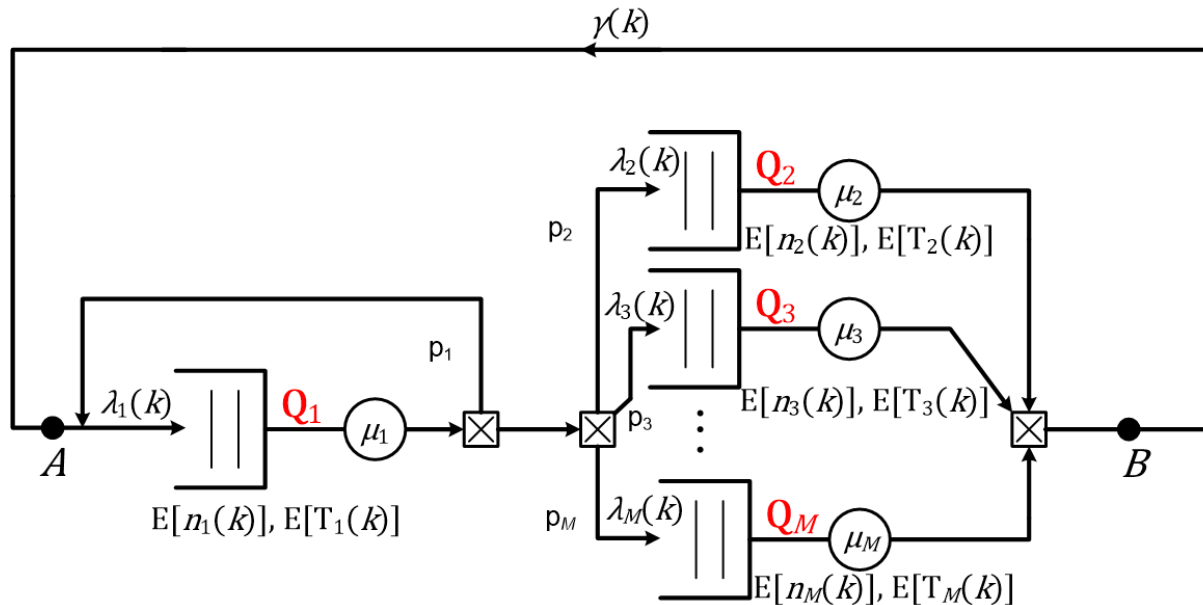
Από το **Θεώρημα Αφίξεων σε Κλειστά Δίκτυα** έχουμε τον αναδρομικό τύπο για $k = 1, 2, \dots, N$

$$E[T_i(k)] = \frac{1 + E[n_i(k-1)]}{\mu_i}$$

με αρχικές τιμές $E[n_i(0)] = 0, i = 1, 2, \dots, M$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

MEAN VALUE ANALYSIS - MVA (3/5)



Εφαρμογή για: $N = 3$ πελάτες, $M = 3$ ουρές και τιμές των παραμέτρων:

$$\mu_1 = \frac{1}{28} \text{msec}^{-1}, \mu_2 = \frac{1}{40} \text{msec}^{-1}, \mu_3 = \frac{1}{280} \text{msec}^{-1} \text{ και } p_1 = 0.1, p_2 = 0.7, p_3 = 0.2$$

Εύρεση των v_i : Σε κάθε περιφορά πελάτη στον εξωτερικό βρόχο ανάδρασης αντιστοιχούν v_i επισκέψεις στα υποσυστήματα Q_i που συντελούν στις ρυθμαποδόσεις $\lambda_i(k)$:

$$\lambda_i(k) = v_i \cdot \gamma(k) \text{ ή } \lambda_1(k) = \gamma(k) + p_1 \cdot \lambda_1(k), \lambda_2(k) = p_2 \cdot \lambda_1(k), \lambda_3(k) = p_3 \cdot \lambda_1(k) \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{10}{9}, v_2 = \frac{7}{9}, v_3 = \frac{2}{9}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

MEAN VALUE ANALYSIS - MVA (4/5)

Για $k = 1$:

$$E[T_1(1)] = \frac{1+E[n_1(0)]}{\mu_1} = \frac{1+0}{1/28} = 28 \text{ msec} = 0.028 \text{ sec}$$

$$E[T_2(1)] = \frac{1+E[n_2(0)]}{\mu_2} = \frac{1+0}{1/40} = 40 \text{ msec} = 0.040 \text{ sec}$$

$$E[T_3(1)] = \frac{1+E[n_3(0)]}{\mu_3} = \frac{1+0}{1/280} = 280 \text{ msec} = 0.280 \text{ sec}$$

$$\gamma(1) = \frac{1}{\frac{10}{9} \cdot 0.028 + \frac{7}{9} \cdot 0.040 + \frac{2}{9} \cdot 0.280} = 8.03572 \text{ πελάτες/sec}$$

$$\lambda_1(1) = v_1 \cdot \gamma(1) = \frac{10}{9} \cdot 8.03572 = 8.92858, \lambda_2(1) = v_2 \cdot \gamma(1) = \frac{7}{9} \cdot 8.03572 = 6.25000,$$

$$\lambda_3(1) = v_3 \cdot \gamma(1) = \frac{2}{9} \cdot 8.03572 = 1.78572 \text{ (πελάτες/sec)}$$

$$E[n_1(1)] = E[T_1(1)] \cdot \lambda_1(1) = 0.028 \cdot 8.92858 = 0.25 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_2(1)] = E[T_2(1)] \cdot \lambda_2(1) = 0.040 \cdot 6.25000 = 0.25 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_3(1)] = E[T_3(1)] \cdot \lambda_3(1) = 0.280 \cdot 1.78572 = 0.5 \text{ πελάτες}$$

Για $k = 2$:

$$E[T_1(2)] = \frac{1+E[n_1(1)]}{\mu_1} = \frac{1+0.25}{1/28} = 35 \text{ msec} = 0.035 \text{ sec}$$

$$E[T_2(2)] = \frac{1+E[n_2(1)]}{\mu_2} = \frac{1+0.25}{1/40} = 50 \text{ msec} = 0.050 \text{ sec}$$

$$E[T_3(2)] = \frac{1+E[n_3(1)]}{\mu_3} = \frac{1+0.5}{1/280} = 420 \text{ msec} = 0.420 \text{ sec}$$

$$\gamma(2) = \frac{2}{\frac{10}{9} \cdot 0.035 + \frac{7}{9} \cdot 0.050 + \frac{2}{9} \cdot 0.420} = 11.68832 \text{ πελάτες/sec}$$

$$\lambda_1(2) = v_1 \cdot \gamma(2) = \frac{10}{9} \cdot 11.68832 = 12.98702, \lambda_2(2) = v_2 \cdot \gamma(2) = \frac{7}{9} \cdot 11.68832 = 9.09092,$$

$$\lambda_3(2) = v_3 \cdot \gamma(2) = \frac{2}{9} \cdot 11.68832 = 2.59740 \text{ (πελάτες/sec)}$$

$$E[n_1(2)] = E[T_1(2)] \cdot \lambda_1(2) = 0.035 \cdot 12.98702 = 0.45455 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_2(2)] = E[T_2(2)] \cdot \lambda_2(2) = 0.050 \cdot 9.09092 = 0.45455 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_3(2)] = E[T_3(2)] \cdot \lambda_3(2) = 0.420 \cdot 2.59740 = 1.09090 \text{ πελάτες}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

MEAN VALUE ANALYSIS - MVA (5/5)

Για $k = 3$:

$$E[T_1(3)] = \frac{1+E[n_1(2)]}{\mu_1} = \frac{1+0.45455}{1/28} = 40.72 \text{ msec} = 0.0407 \text{ sec}$$

$$E[T_2(3)] = \frac{1+E[n_2(2)]}{\mu_2} = \frac{1+0.45455}{1/40} = 58.18 \text{ msec} = 0.058 \text{ sec}$$

$$E[T_3(3)] = \frac{1+E[n_3(2)]}{\mu_3} = \frac{1+1.09090}{1/280} = 585.45 \text{ msec} = 0.585 \text{ sec}$$

$$\gamma(3) = \frac{3}{\frac{10}{9} \cdot 0.0407 + \frac{7}{9} \cdot 0.058 + \frac{2}{9} \cdot 0.585} = 13.616 \text{ πελάτες/sec}$$

$$\lambda_1(3) = v_1 \cdot \gamma(3) = \frac{10}{9} \cdot 13.616 = 15.1289, \lambda_2(3) = v_2 \cdot \gamma(3) = \frac{7}{9} \cdot 13.616 = 10.5902,$$

$$\lambda_3(3) = v_3 \cdot \gamma(3) = \frac{2}{9} \cdot 13.616 = 3.0258 \text{ (πελάτες/sec)}$$

$$E[n_1(3)] = E[T_1(3)] \cdot \lambda_1(3) = 0.0407 \cdot 15.1289 = 0.61575 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_2(3)] = E[T_2(3)] \cdot \lambda_2(3) = 0.058 \cdot 10.5902 = 0.61423 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_3(3)] = E[T_3(3)] \cdot \lambda_3(3) = 0.585 \cdot 3.0258 = 1.77001 \text{ πελάτες}$$

Για $k = 4$:

$$E[T_1(4)] = \frac{1+E[n_1(3)]}{\mu_1} = \frac{1+0.61575}{1/28} = 45.24 \text{ msec} = 0.045 \text{ sec}$$

$$E[T_2(4)] = \frac{1+E[n_2(3)]}{\mu_2} = \frac{1+0.61423}{1/40} = 64.57 \text{ msec} = 0.065 \text{ sec}$$

$$E[T_3(4)] = \frac{1+E[n_3(3)]}{\mu_3} = \frac{1+0.585}{1/280} = 443.8 \text{ msec} = 0.444 \text{ sec}$$

$$\gamma(4) = \frac{4}{\frac{10}{9} \cdot 0.045 + \frac{7}{9} \cdot 0.065 + \frac{2}{9} \cdot 0.444} = 20.078 \text{ πελάτες/sec}$$

$$\lambda_1(4) = v_1 \cdot \gamma(4) = \frac{10}{9} \cdot 20.078 = 22.3089, \lambda_2(4) = v_2 \cdot \gamma(4) = \frac{7}{9} \cdot 20.078 = 15.6162,$$

$$\lambda_3(4) = v_3 \cdot \gamma(4) = \frac{2}{9} \cdot 20.078 = 4.4618 \text{ (πελάτες/sec)}$$

$$E[n_1(4)] = E[T_1(4)] \cdot \lambda_1(4) = 0.045 \cdot 22.3089 = 1.00390 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_2(4)] = E[T_2(4)] \cdot \lambda_2(4) = 0.065 \cdot 15.6162 = 1.01505 \text{ πελάτες}$$

$$E[n_3(4)] = E[T_3(4)] \cdot \lambda_3(4) = 0.444 \cdot 4.4618 = 1.98104 \text{ πελάτες}$$

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ MARKOV

(**BIRTH-DEATH**)

- Έστω στοχαστικό σύστημα **Birth-Death** με απ' ευθείας μεταβάσεις από την εργοδική κατάσταση S_i σε γειτονική κατάσταση S_j που μπορεί να γίνονται με ρυθμό r_{ij}

- Ο συνολικός ρυθμός μεταβάσεων από την S_i προς όλες τις γειτονικές καταστάσεις είναι

$$R_i = \sum_{S_j} r_{ij}$$

- Ο χρόνος παραμονής (**dwelt time**) T_i στη κατάσταση S_i μέχρι την επόμενη μετάβαση είναι τυχαία μεταβλητή που προκύπτει από το **ελάχιστο** ανεξαρτήτων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, αντίστοιχων με όλες τις πιθανές μεταβάσεις εκτός της S_i . Η T_i θα είναι εκθετική με ρυθμό $R_i = \sum_{S_j} r_{ij}$ και μέση τιμή

$$E[T_i] = \frac{1}{R_i}$$

- Οι εργοδικές πιθανότητες $P[S_i]$ αν υπάρχουν μπορούν να υπολογισθούν σαν το όριο του λόγου του συνολικού χρόνου που το σύστημα παραμένει στη κατάσταση S_i δια του χρονικού διαστήματος παρατήρησης T μιας χρονικής εξέλιξης (δείγματος) της στοχαστικής εξέλιξης :

$$P[S_i] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\#\{\text{ΕΠΙΣΚΕΨΕΩΝ στην } S_i\} \times E[T_i]}{T} \approx \frac{\#\{\text{ΕΠΙΣΚΕΨΕΩΝ στην } S_i\} \times E[T_i]}{\sum_{S_j} \{\#\{\text{ΕΠΙΣΚΕΨΕΩΝ στην } S_j\} \times E[T_j]\}}$$

Άρα μπορούμε να προσομοιώσουμε σύστημα Birth-Death καταμετρώντας τις αφίξεις στις διάφορες καταστάσεις που μεταβαίνει

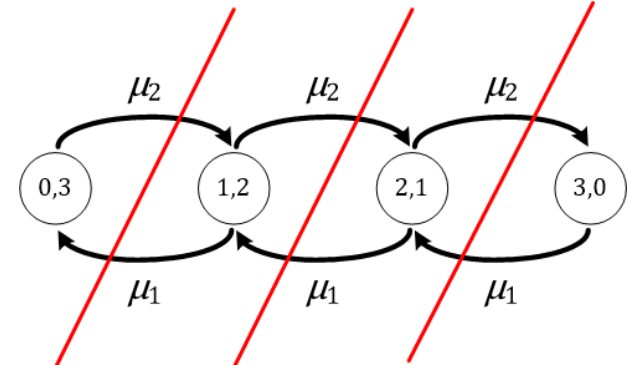
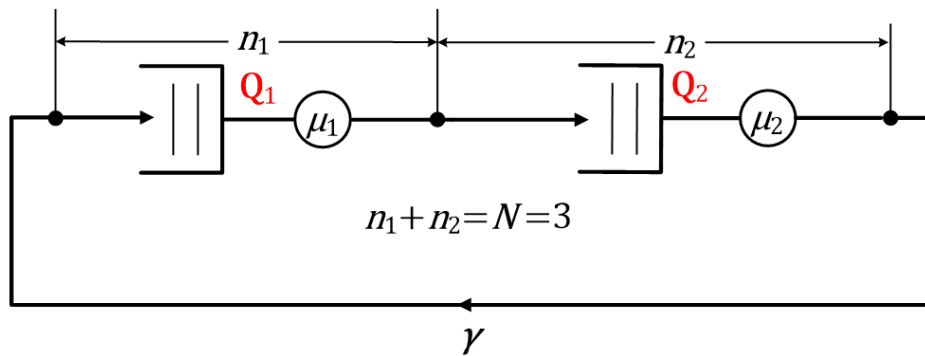
- Η εξέλιξη της κατάστασης (πληθυσμού) του συστήματος προκύπτει από τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση S_i στις γειτονικές καταστάσεις S_j με το δεδομένο ότι μια από αυτές θα συμβεί με απόλυτη βεβαιότητα:

$$P[S_i \rightarrow S_j / \text{μετάβαση}] = \frac{r_{ij}}{R_i}$$

- Η προσομοίωση ενεργοποιεί τις μεταβάσεις με κλήση τυχαίου αριθμού $RANDOM(0,1)$ ομοιόμορφα κατανεμημένου μεταξύ $(0, 1)$:

Αν ο $RANDOM(0,1)$ ανήκει σε υποδιάστημα του $(0, 1)$ **ανάλογο** του $\frac{r_{ij}}{R_i}$, η επόμενη κατάσταση θα είναι η S_j

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΑΡΚΟΒ



Κριτήριο σύγκλισης: Διαδοχικές τιμές μέσου αριθμού πελατών σε κάθε ουρά < 0.00001

- $\mu_1/\mu_2 = 1$

$P(0,3) = 0.252$, $P(1,2) = 0.251$, $P(2,1) = 0.249$, $P(3,0) = 0.247$, $E(n_1) = 1.49$, $E(n_2) = 1.51$, $E(n_1) + E(n_2) = 3$

- $\mu_1/\mu_2 = 2$

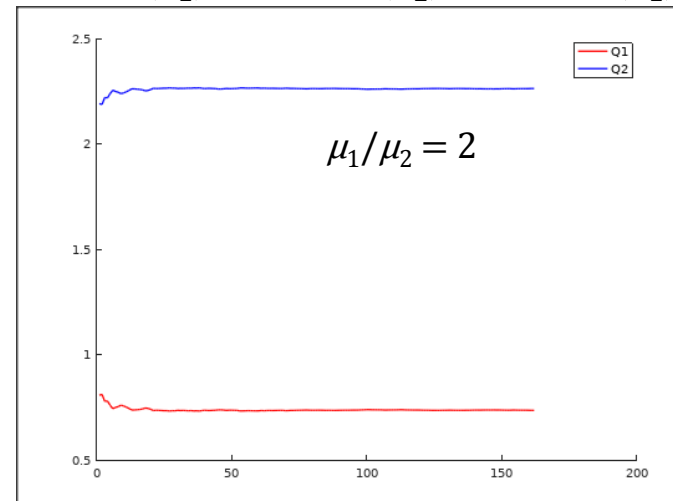
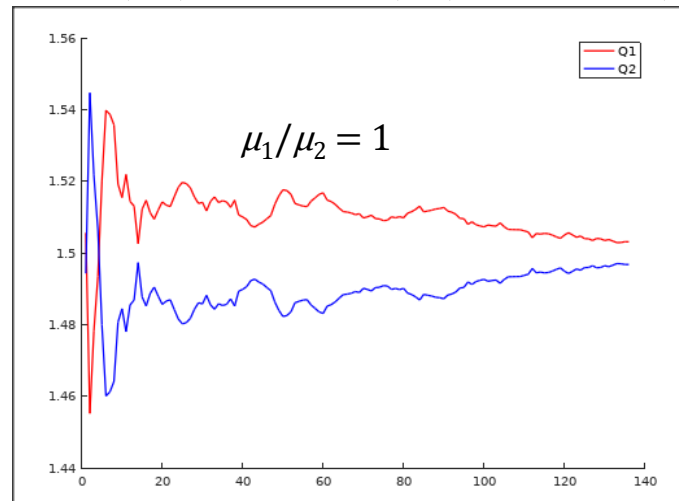
$P(0,3) = 0.534$, $P(1,2) = 0.266$, $P(2,1) = 0.133$, $P(3,0) = 0.067$, $E(n_1) = 0.73$, $E(n_2) = 2.27$, $E(n_1) + E(n_2) = 3$

- $\mu_1/\mu_2 = 3$

$P(0,3) = 0.673$, $P(1,2) = 0.225$, $P(2,1) = 0.249$, $P(3,0) = 0.025$, $E(n_1) = 0.45$, $E(n_2) = 2.55$, $E(n_1) + E(n_2) = 3$

- $\mu_1/\mu_2 = 4$

$P(0,3) = 0.754$, $P(1,2) = 0.158$, $P(2,1) = 0.047$, $P(3,0) = 0.012$, $E(n_1) = 0.32$, $E(n_2) = 2.68$, $E(n_1) + E(n_2) = 3$



Διαγράμματα μέσου αριθμού πελατών $E(n_1)$, $E(n_2)$ στα υποσυστήματα Q_1 , Q_2

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΓΙΑ ΔΙΚΤΥΑ ΟΥΡΩΝ ΜΕ ΕΡΓΟΔΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΟΡΦΗΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

- **BCMP Networks:** F. **B**asket, K.M. **C**handi, R.H. **M**untz, F.C. **P**alacios: “Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers”, Journal of the ACM, 22 (2), April 1975
- **Παραδοχές:**
 - Δίκτυο M συστημάτων εξυπηρέτησης (ουρών) Q_i των εξής τύπων:
 1. Εξυπηρέτησης **FCFS (FIFO)** **$M/M/1$** με εκθετικό εξυπηρετητή $1/\mu_i$ και ενιαίο τύπο πελατών
 2. Εξυπηρέτησης **Processor Sharing** **$M/G/1$** με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
 3. Ουρές με άπειρους εξυπηρετητές **$M/G/\infty$** με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
 4. Εξυπηρέτησης **LCFS** (with pre-emptive resume) **$M/G/1$** με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
 - Για τις περιπτώσεις 2-4 η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης πρέπει να έχει μετασχηματισμό Laplace μορφής κλάσματος (rational Laplace Transform)
 - Η δρομολόγηση μεταξύ ουρών γίνεται με τυχαίο τρόπο
 - Ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας του Kleinrock
 - Poisson εξωτερικές αφίξεις
- **Αποτέλεσμα:** Η εργοδική πιθανότητα (αν υπάρχει) του διανύσματος κατάστασης $(x_1, x_2, \dots, x_M)$ του δικτύου δίνεται σε μορφή γινομένου παραγόντων εξαρτώμενων από την κατάσταση της κάθε ουράς: $p(x_1, x_2, \dots, x_M) = C \times \pi_1(x_1) \times \pi_2(x_2) \times \dots \times \pi_M(x_M)$ **(απόδειξη με επαλήθευση εξισώσεων ισορροπίας μεταβάσεων)**