

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Queuing Systems

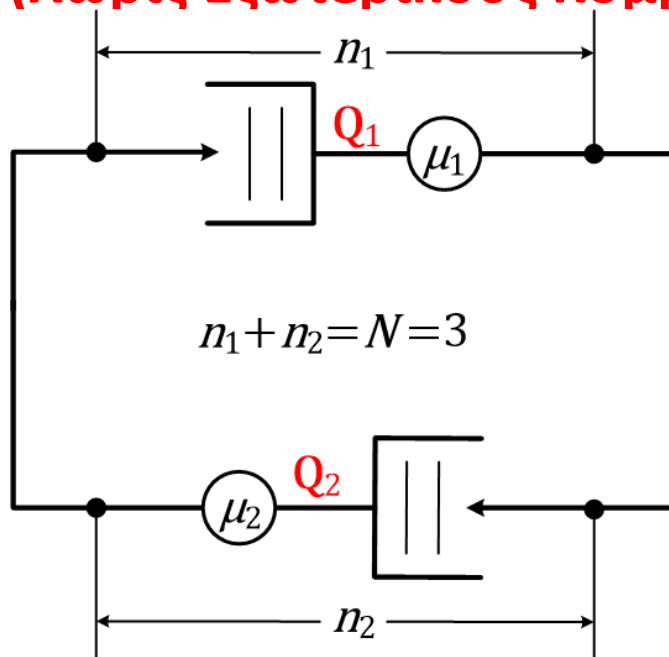
Κλειστά Δίκτυα Ουρών Markov
Θεώρημα Gordon – Newell
Αλγόριθμος Buzen

Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr

9/5/2018

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

**$M=2$ Ουρές, $N=3$ Αενάως Περιφερόμενοι Πελάτες
(Χωρίς Εξωτερικούς Κόμβους - Πηγές & Προορισμούς Πελατών)**



$$n_1 + n_2 = N = 3, \quad \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

$$\mu_1 P(1,2) = \mu_2 P(0,3)$$

$$\mu_1 P(2,1) = \mu_2 P(1,2)$$

$$\mu_1 P(3,0) = \mu_2 P(2,1)$$

$$P(0,3) + P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1$$

$$P(0,3) = \alpha^3 / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$P(1,2) = \alpha^2 / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$P(2,1) = \alpha / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

$$P(3,0) = 1 / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3]$$

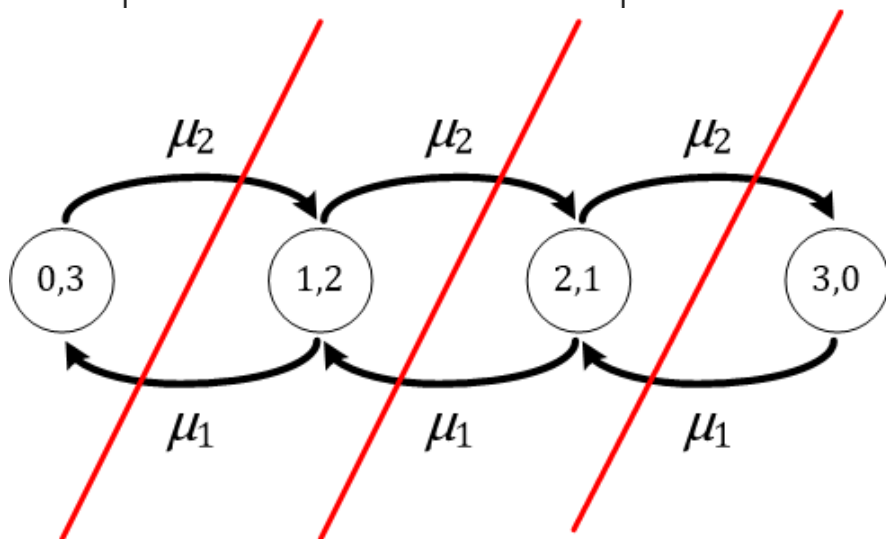
$$P(0,3)[1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] / \alpha^3 = 1$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_1 [1 - P(0,3)] = \\ &= \mu_2 [\alpha + \alpha^2 + \alpha^3] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] = \\ &= \mu_1 [1 + \alpha + \alpha^2] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(n_1) &= P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \\ &= [\alpha^2 + 2\alpha + 3] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(n_2) &= P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \\ &= [\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3] / [1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3] \end{aligned}$$

$$E(n_1) + E(n_2) = N = 3 \text{ πελάτες}$$



ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL (1/2)

Παραδοχές:

- Κλειστό δίκτυο N περιφερομένων πελατών σε M διασυνδεδεμένα υποσυστήματα (ουρές) Q_i εκθετικής εξυπηρέτησης σταθερού συνολικού αριθμού πελατών $N = \sum_{i=1}^M n_i$ όπου n_i ο αριθμός πελατών στο Q_i στην εργοδική κατάσταση: Τυχαία μεταβλητή $n_i = \lim_{t \rightarrow \infty} n_i(t)$
- Ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $i = 1, 2, \dots, M$ ρυθμού μ_i με παραδοχή **Kleinrock**
- Τυχαία Δρομολόγηση από υποσύστημα Q_i σε Q_j με πιθανότητα $p_{ij} = \text{Prob}\{i \rightarrow j\}$

Θεώρημα: Οι εργοδικές πιθανότητες της $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ έχουν **μορφή γινομένου:**

$$P(\mathbf{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = \frac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^M (X_i)^{n_i}$$

- Οι παράμετροι X_i είναι **ανάλογες** των βαθμών χρησιμοποίησης των ουρών i , κατ' αναλογία με τα $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ στα ανοικτά δίκτυα ουρών M/M/1 του Θεωρήματος **Jackson**
- Η ρυθμαπόδοση λ_j διαμέσου του Q_j είναι ανάλογη του $\mu_j X_j$. Οι X_j δεσμεύονται από γραμμικό σύστημα διατήρησης μέσω ρυθμών πελατών από δρομολόγηση άλλων Q_i :

$$\mu_j X_j = \sum_{i=1}^M \mu_i X_i p_{ij}, \quad j = 1, \dots, M$$

- Συνήθως ορίζουμε αυθαίρετα την τιμή της $X_1 = 1$ ώστε το ανωτέρω **γραμμικώς εξαρτημένο σύστημα εξισώσεων** να έχει μονοσήμαντη λύση για τις παραμέτρους X_j
Σημείωση: Στα ανοικτά δίκτυα **Jackson** οι εξωτερικές ροές εισόδου γ_i εγγυώνται τη γραμμική ανεξαρτησία των εξισώσεων διατήρησης μέσω ρυθμών πελατών

ΚΛΕΙΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ GORDON-NEWELL (2/2)

- Η σταθερά $G(N)$, προκύπτει από την εξίσωση **κανονικοποίησης** (άθροισμα εργοδικών πιθανοτήτων για όλες τις πιθανές απείρως επισκέψιμες καταστάσεις - positive recurrent states - ίσο με μονάδα)
- Η $G(N)$ αντιστοιχεί στη **Συνάρτηση Κερματισμού – Partition Function** της Στατιστικής Μηχανικής. Ο υπολογισμός της απαιτεί την καταγραφή όλων των καταστάσεων (n_1, n_2, \dots, n_M) συνδυασμών n_i που αθροίζουν σε N (στην γενικότητα του «δύσκολο» πρόβλημα). Στην περίπτωση μας λύνεται με τον Επαναληπτικό Αλγόριθμο του **Buzen** (επόμενη διαφάνεια)
- Οι οριακές πιθανότητες (**Marginal Probabilities**) για το υποσύστημα (ουρά) Q_i δίνονται από:

$$P(n_i = k) = \frac{X_i^k}{G(N)} [G(N - k) - X_i G(N - k - 1)]$$

- Ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή i δίνεται από

$$P(n_i \geq 1) = X_i G(N - 1) / G(N)$$

- Ο μέσος αριθμός πελατών στο υποσύστημα Q_i (μαζί με τον εξυπηρετούμενο) δίνεται από:

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ BUZEN

Πολυπλοκότητα $O(N \times M)$

https://en.wikipedia.org/wiki/Buzen%27s_algorithm

Διαμόρφωση πίνακα $(N + 1) \times (M + 1)$ στοιχείων $g(n, m)$, $n = 0, 1, \dots, N$ και $m = 0, 1, \dots, M$:

$$g(n, m) \triangleq \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i}$$
$$= \sum_{(n_1 + \dots + n_m = n) \wedge (n_m = 0)}^n \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i} + \sum_{(n_1 + \dots + n_m = n) \wedge (n_m > 0)}^n \prod_{i=1}^m (X_i)^{n_i}$$

Επαναληπτική σχέση (Recurrence Relation): $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$

Αρχικές συνθήκες Επαναληπτικού Αλγορίθμου:

$$g(0, m) = 1, \quad m = 1, \dots, M \text{ και } g(n, 1) = (X_1)^n, \quad n = 0, \dots, N. \text{ Με } X_1 = 1 \Rightarrow g(n, 1) = 1$$

Η συνάρτηση κερματισμού (**Partition Function**) για κλειστό δίκτυο M ουρών και n πελατών ($n = 0, \dots, N$) δίνεται από την τελευταία στήλη του πίνακα $g(n, m)$:

$$G(n) = g(n, M), \quad n = 1, 2, \dots, N \text{ και } G(N) = g(N, M)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N-k)}{G(N)}, \quad P(n_i \geq 1) = X_i G(N-1) / G(N)$$

Για τον υπολογισμό των N στοιχείων της στήλης M του πίνακα $g(n, m)$ απαιτούνται $N \times M$ προσθέσεις και $N \times M$ πολλαπλασιασμοί: Πολυπλοκότητα $O(N \times M)$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

Θεώρημα Gordon-Newell για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

$$X_1 \mu_1 = X_2 \mu_2$$

$$X_1 = 1, X_2 = \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

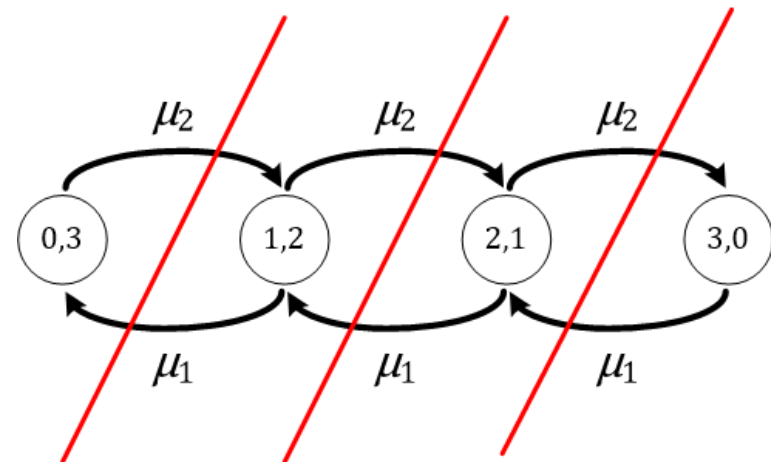
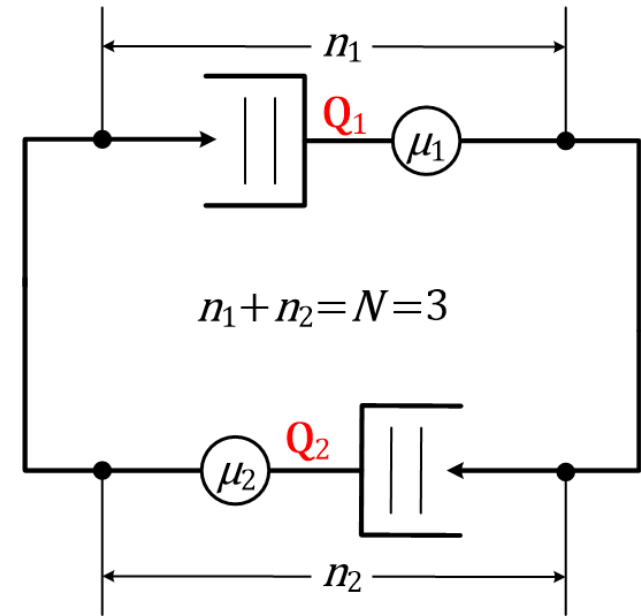
- $P(0,3) = X_2^3 / G(3) = \alpha^3 / G(3)$
- $P(1,2) = X_2^2 / G(3) = \alpha^2 / G(3)$
- $P(2,1) = X_2 / G(3) = \alpha / G(3)$
- $P(3,0) = 1 / G(3)$
- $1 / G(3) + \alpha / G(3) + \alpha^2 / G(3) + \alpha^3 / G(3) = 1$

$$\text{Άρα: } G(3) = 1 / (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$$

$$\gamma = \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_2 [1 - 1 / G(3)]$$

$$E(T_j) = E(n_j) / \gamma$$

- $E(n_1) = P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \frac{[a^2 + 2a + 3]}{G(3)}$
- $E(n_2) = P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \frac{[a + 2a^2 + 3a^3]}{G(3)}$
- $E(n_1) + E(n_2) = N = 3$



ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ

Αλγόριθμος Buzen για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

Με βάση τον Επαναληπτικό Αλγόριθμο του **Buzen**

και $X_1 = 1, X_2 = \mu_1/\mu_2 = a$ ισχύει ότι:

$$g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$$

$$G(N) = g(N, M)$$

Προκύπτει :

$$G(1) = 1 + a$$

$$G(2) = 1 + a + a^2$$

$$G(3) = 1 + a + a^2 + a^3$$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2
0	1	1
1	1	$1 + a$
2	1	$1 + a + a^2$
3	1	$1 + a + a^2 + a^3$

Η χρησιμοποίηση της ουράς Q_1 είναι

$$P(n_i \geq 1) = P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1 - P(0,3) = X_i G(N - 1) / G(N) = X_1 G(2) / G(3) = \\ = \frac{1+a+a^2}{1+a+a^2+a^3} \quad (\text{όπως και στη 2}^\eta \text{ διαφάνεια})$$

Επίσης:

$$P(0,3) = a^3 / G(3)$$

$$P(1,2) = a^2 / G(3)$$

$$P(2,1) = a / G(3)$$

$$P(3,0) = 1 / G(3)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$

$$E(n_1) = \sum_{k=1}^3 \frac{G(3 - k)}{G(3)} = \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

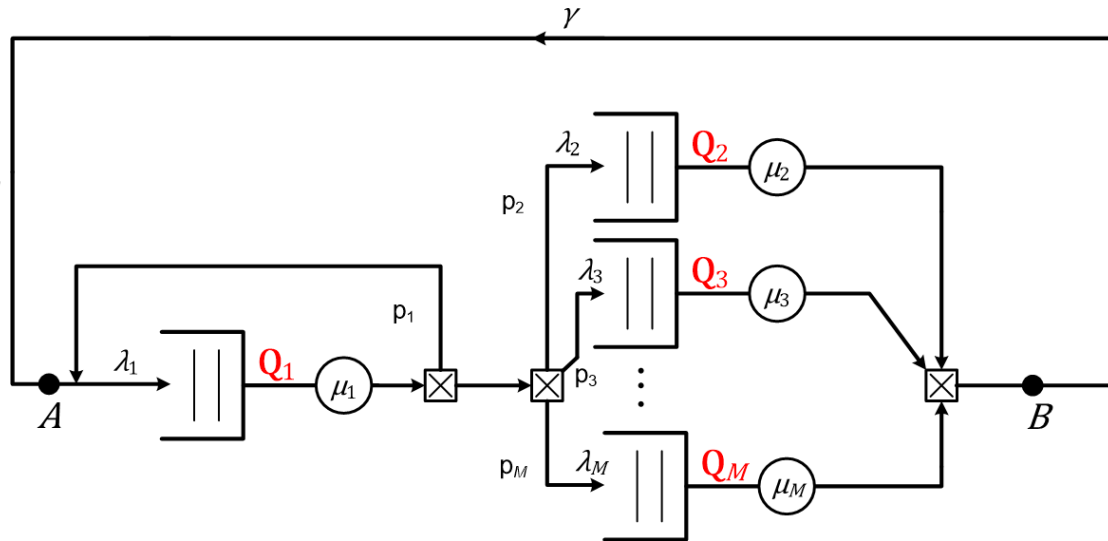
$$E(n_2) = \sum_{k=1}^3 X_2^k \frac{G(N - k)}{G(N)} = 3 - E(n_1) = \frac{a + 2a^2 + 3a^3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/2)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Κλειστό δίκτυο M εκθετικών ουρών Q_1 (CPU), Q_2, \dots, Q_M (I/O)

Παράλληλη Επεξεργασία N προγραμμάτων (εντολών) με ανακύκλωση στη CPU (πιθανότητα $p_{11} = p_1$), επιλογή Υποσυστήματος I/O (με πιθανότητες $p_{12} = p_2, p_{13} = p_3, \dots, p_{1M} = p_M$) και απάντηση – δημιουργία νέας εντολής (εξωτερική ανάδραση).



Εφαρμογή Αλγορίθμου *Buzen* για $N = 1, 2, 3, 4$ πελάτες (παράλληλα προγράμματα) και $M = 3$ ουρές Q_1, Q_2, Q_3

$$\mu_1 X_1 = p_1 \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3$$

$$\mu_2 X_2 = p_2 \mu_1 X_1$$

$$\mu_3 X_3 = p_3 \mu_1 X_1$$

$$\text{Με } \mu_1 = \frac{1}{28} \text{ msec}^{-1}, \mu_2 = \frac{1}{40} \text{ msec}^{-1}, \mu_3 = \frac{1}{280} \text{ msec}^{-1},$$

$p_1 = 0.1, p_2 = 0.7, p_3 = 0.2$ και $X_1 = 1$ προκύπτει πως $X_2 = 1, X_3 = 2$

Ο αναδρομικός τύπος $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$ δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές $G(N) = g(N, 3)$ αντιστοιχούν σε $N = 1, 2, 3, 4$ προγράμματα
 $G(1) = 4, \quad G(2) = 11, \quad G(3) = 26, \quad G(4) = 57$

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57

ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/2)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Οι αντίστοιχοι βαθμοί
χρησιμοποίησης U_1 της CPU (Q_1)
 $G(N)/G(N-1)$ είναι:

N	1	2	3	4
U_1	1/4	4/11	11/26	26/57

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος είναι

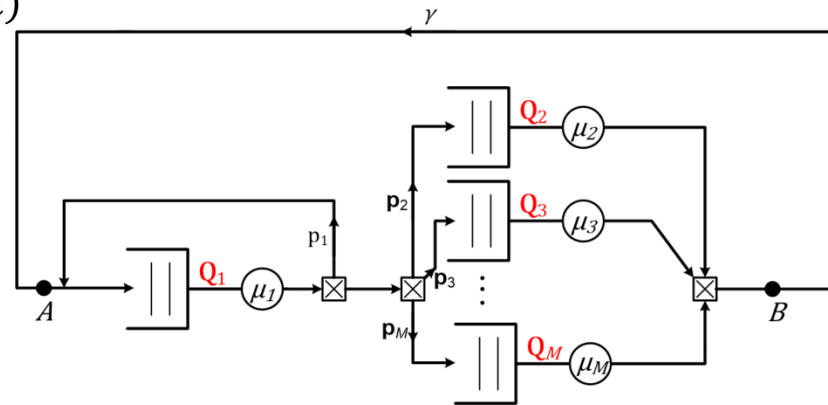
$$\begin{aligned} \gamma &= \mu_2 p(n_2 \geq 1) + \mu_3 p(n_3 \geq 1) \\ &= \mu_2 X_2 G(N-1)/G(N) + \mu_3 X_3 G(N-1)/G(N) \\ &= (\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) G(N-1)/G(N) \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες τιμές σε προγράμματα/sec είναι:

N	1	2	3	4
γ	8.04	11.69	13	14.66

Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

n	X_1	X_2	X_3
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57



Ο μέσος χρόνος απόκρισης είναι $E(T_{AB}) = N/\gamma$
Οι αντίστοιχες τιμές σε sec είναι:

N	1	2	3	4
$E(T_{AB})$	0.124	0.171	0.221	0.273

