ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems

Ανοικτά Δίκτυα Ουρών Markov - Θεώρημα Jackson
(1) Παράδειγμα Επίδοσης Δικτύου Μεταγωγής Πακέτου
(2) Παράδειγμα Ανάλυσης Υπολογιστικού Συστήματος

Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

2/5/2018

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (1/2) (*επανάληψη*)

- ***Θεώρημα Burke***: Η έξοδος πελατών από ουρά *M/M/1* ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό τον ρυθμό εισόδου λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

  - Θεωρούμε δύο εκθετικές ουρές $\mathbf{Q1}, \mathbf{Q2}$ (π.χ. μεταγωγείς πακέτου) με χρόνους εξυπηρέτησης **ανεξάρτητες** εκθετικές μεταβλητές με μέσους όρους $1/\mu_1, 1/\mu_2$
  - Προσέγγιση με **Παραδοχή Ανεξαρτησίας** *Leonard Kleinrock* **σε δίκτυα μεταγωγής πακέτου**: Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (ανάλογοι του μήκους πακέτου) δεν διατηρούν τα μεγέθη τους όταν προωθούνται μεταξύ συστημάτων (ουρών) εξυπηρέτησης . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ανατίθενται σε κάθε σύστημα σαν **ανεξάρτητε**ς εκθετικές τυχαίες μεταβλητές
  - Η είσοδος στην $\mathbf{Q1}$ είναι Poisson με ρυθμό λ (η $\mathbf{Q1}$ είναι ***M/M/1***), $\lambda < \{\mu_1, \mu_2\}$ για εργοδικότητα (ισορροπία)
  - Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ όπου n_1# πελατών στην $\mathbf{Q1}$, n_2 # πελατών στην $\mathbf{Q2}$

  - Καταστρώνουμε το διάγραμμα μεταβάσεων καταστάσεων Markov σε δύο διαστάσεις και γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας
  - Εξετάζουμε αν οι εργοδικές πιθανότητες έχουν **μορφή γινομένου** (***product form solution***)

    $P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2) \,?= P(n_1)P(n_2)? = (1-\rho_1){\rho_1}^{n_1}(1-\rho_2){\rho_2}^{n_2} = K{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}$

    όπου $\rho_1 = \lambda/\mu_1$, $\rho_2 = \lambda/\mu_2$ και $K = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$ η ***Σταθερά Κανονικοποίησης***:

$$\sum_{\boldsymbol{n}} P(\boldsymbol{n}) = 1$$

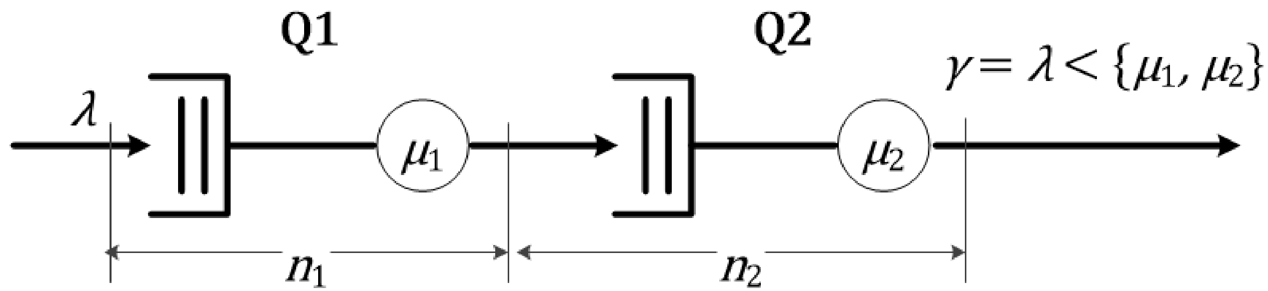
  - Οι εξισώσεις επαληθεύονται, και επομένως αποτελούν τη ***μοναδική*** λύση (μονοσήμαντα).
  - Άρα οι δύο ουρές συμπεριφέρονται σαν **δύο ανεξάρτητες ουρές *M/M/1*** σε ισορροπία με ρυθμούς εισόδου λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_1, μ_2

Έπεται πως ο ρυθμός εξόδου της $\mathbf{Q1}$ *(και εισόδου στην* $\mathbf{Q2}$*) είναι Poisson με ρυθμό* λ

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (2/2)

Επαλήθευση Υπόθεσης Γινομένου (*επανάληψη*)

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1-\rho_1){\rho_1}^{n_1}(1-\rho_2){\rho_2}^{n_2} = K{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}$$



Επαλήθευση για Αντιπροσωπευτικές Καταστάσεις:

$$\boldsymbol{n} = (2,2)$$

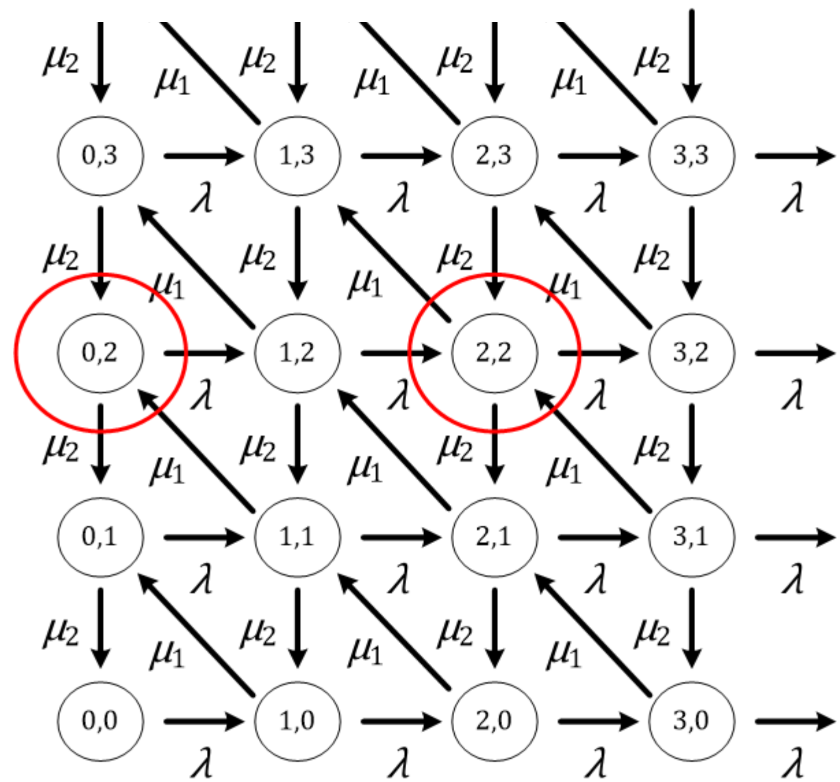
$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(2,2) =?\ \lambda P(1,2) + \mu_1 P(3,1) + \mu_2 P(2,3)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^2$$
$$=?\ \lambda K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2)^2 + \mu_1 K(\lambda/\mu_1)^3(\lambda/\mu_2)$$
$$+\ \mu_2 K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^3 \quad \surd$$

$$\boldsymbol{n} = (0,2)$$

$$(\lambda + \mu_2)P(0,2) =?\ \mu_1 P(1,1) + \mu_2 P(0,3)$$

$$(\lambda + \mu_2)K(\lambda/\mu_2)^2$$
$$=?\ \mu_1 K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_2)^3 \quad \surd$$



ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/3)
Παραδοχές για Κατάσταση Δικτύου χωρίς Μνήμη (Markov) (*επανάληψη*)

- Έξοδος Ουράς Μ/Μ/1 – Θεώρημα ***Burke***
  - Οι αναχωρήσεις πελατών από σύστημα ***M/M/1*** αποτελούν διαδικασία Poisson

- Άθροιση – Διάσπαση διαδικασιών Poisson
  - Άθροιση (aggregation) ανεξαρτήτων ροών Poisson λ_1, λ_2: Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
  - Τυχαία Διάσπαση (random split, routing) ροής Poisson μέσου ρυθμού λ με πιθανότητες $p,\ q = 1 - p$:

    Παράγει διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $p\lambda, (1-p)\lambda$

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/3)

Θεώρημα Jackson (*επανάληψη*)

Παραδοχές

- Ανοικτό δίκτυο M ***δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού*** (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i\,,\, i = 1,2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i

- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: ***Ανεξάρτητες ροές Poisson*** μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1,2, \dots, M\}$

  Συνολική εξωγενής ροή Poisson σε $\mathbf{Q}_s$: $\gamma_s = \sum_{d=1, d\neq s}^{M} \gamma_{sd}\,, \quad s, d \in \{1,2, \dots, M\}$

- Εσωτερική ***δρομολόγηση*** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{j}}$: r_{ij}

- Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_j$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{M} r_{ij}\lambda_i\,, \qquad j = 1,2, \dots, M$$

- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (***Kleinrock's Independence Assumption***, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (3/3)

Θεώρημα Jackson (*επανάληψη*)

Αποτέλεσμα

- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ αριθμού πελατών n_i στις ουρές (κόμβους κορμού) $\mathbf{Q}_i$

- Η ***Εργοδική Πιθανότητα*** των καταστάσεων $\boldsymbol{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) ***ανεξαρτήτων ουρών M/M/1***

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P(n_1)P(n_2)\dots P(n_M)$$

$$P(n_i) = (1-\rho_i)\rho_i^{\,n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

  όπου λ_i ο συνολικός μέσος ρυθμός (***Poisson***) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης μ_i

- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η $\mathbf{Q}_i$ με το μέγιστο ρ_i

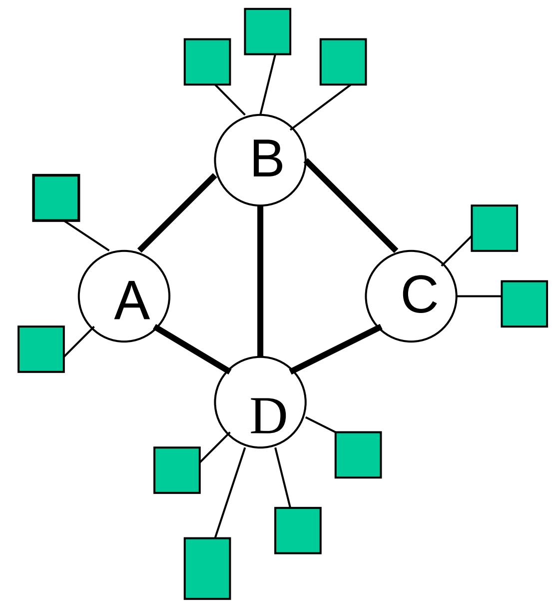
- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{E}(n_\iota) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\boldsymbol{\gamma}$ (***τύπος Little***)
  όπου $\boldsymbol{\gamma}$ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (***Poisson***) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (***network throughput***) $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{s=1}^{M} \sum_{d=1, d\neq s}^{M} \gamma_{sd}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο s σε κόμβο d: $\mathrm{E}(T_{sd}) = \sum_{i-1}^{M} \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1-\rho_i}$
  όπου $\delta_{sd}(i)$ το κλάσμα της ροής γ_{sd} που διαπερνά τον κόμβο $\mathbf{Q}_i$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (1/2)
Internet – Intranet (*επανάληψη*)

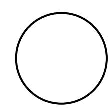
- Θεωρήστε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων.
  - Όλες οι γραμμές (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10$ Gbits/sec. Το μέσο μήκος του πακέτου είναι $E(L) = 1000$ bits (θεωρείστε εκθετική κατανομή).
  - Μεταξύ κόμβων θεωρείστε προσφερόμενους ρυθμούς πακέτων Poisson, με ίσους ρυθμούς r packets/sec (από άκρο σε άκρο).
  - Πακέτα από το A στο C και αντίστροφα δρομολογούνται εξίσου στους δύο ισότιμους δρόμους: (A-B-C) και (A-D-C). Τα πακέτα μεταξύ κόμβων κατευθείαν συνδεδεμένων (A-B), (A-D), (B-D), (B-C), (D-C) δρομολογούνται κατευθείαν.



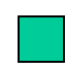
- (A) Βρείτε το ρυθμό r ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι 50%

- (B) Με το r του (A) βρείτε τη μέση καθυστέρηση ενός τυχαίου πακέτου στο δίκτυο (από άκρο σε άκρο)

ΟΔΗΓΙΑ: Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού λ_i (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i / E(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**

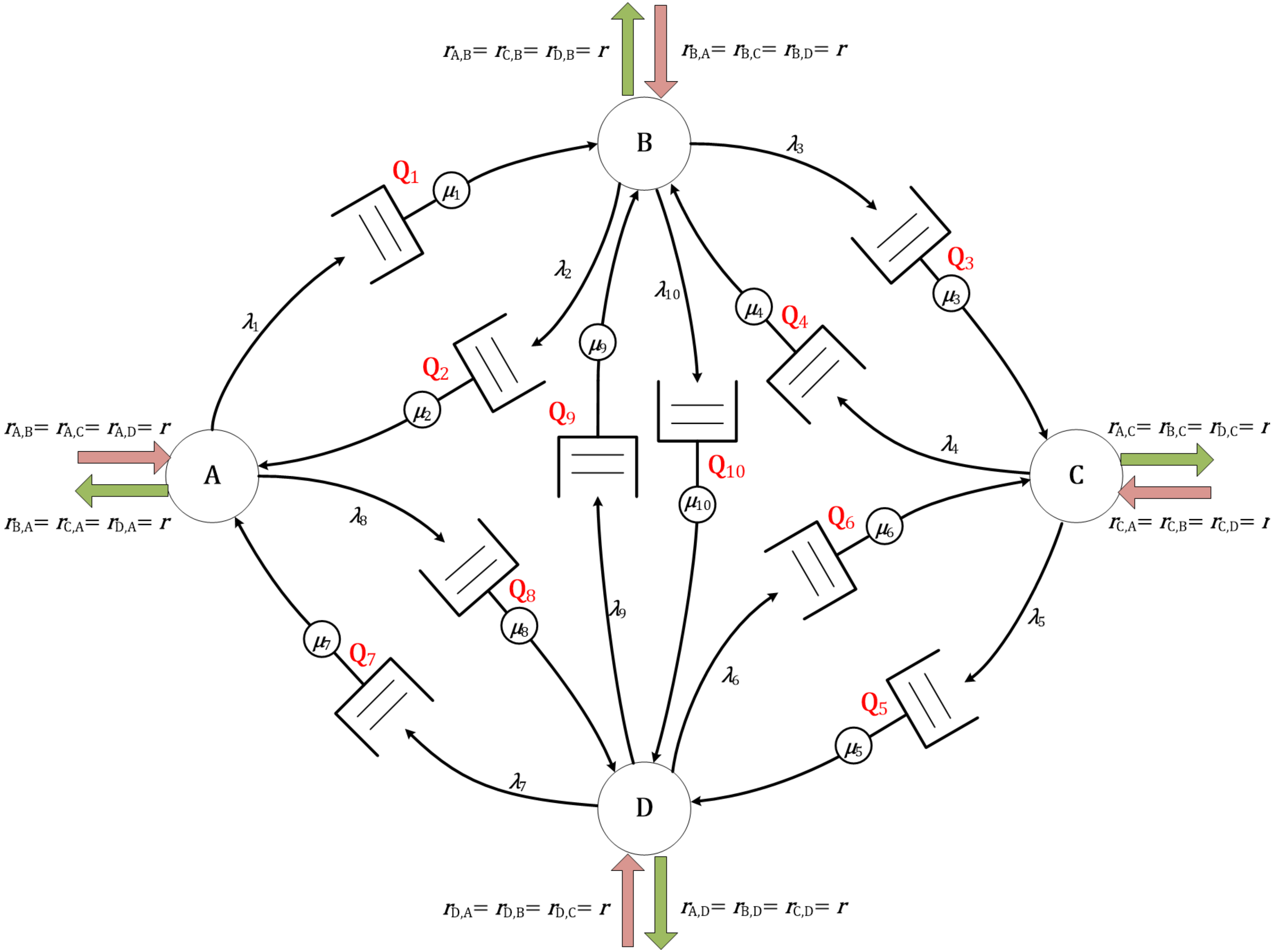


Κόμβος Δικτύου Κορμού
(Δρομολογητής Κορμού, Backbone Router, Packet Switch)



Κόμβος Εισόδου
(H/Y, Access Node, Customer Network - LAN)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (2/2 *επανάληψη*)



ΕΠΙΔΟΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΟΥ (1/2)

Απάντηση στο Ερώτημα (**Α**) Εφαρμογής Δικτύου Μεταγωγής Πακέτου

Με πιθανότητα διαχωρισμού $p = 0.5$, οι ρυθμοί λ_i (packets/sec) στις 10 ανεξάρτητες (***M/M/1***) ουρές $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_{10}$ (***κατευθυντικές συνδέσεις/γραμμές μεταξύ κόμβων κορμού του δικτύου***) είναι:

$$\lambda_1 = r_{\mathrm{A,B}} + pr_{\mathrm{A,C}} = 1.5r,\ \lambda_2 = r_{\mathrm{B,A}} + pr_{\mathrm{C,A}} = 1.5r$$
$$\lambda_3 = r_{\mathrm{B,C}} + pr_{\mathrm{A,C}} = 1.5r,\ \lambda_4 = r_{\mathrm{C,B}} + pr_{\mathrm{C,A}} = 1.5r$$
$$\lambda_5 = r_{\mathrm{C,D}} + (1-p)r_{\mathrm{A,C}} = 1.5r,\ \lambda_6 = r_{\mathrm{D,C}} + (1-p)r_{\mathrm{C,A}} = 1.5r$$
$$\lambda_7 = r_{\mathrm{D,A}} + (1-p)r_{\mathrm{C,A}} = 1.5r,\ \lambda_8 = r_{\mathrm{A,D}} + (1-p)r_{\mathrm{A,C}} = 1.5r$$
$$\lambda_9 = r_{\mathrm{D,B}} = r,\ \lambda_{10} = r_{\mathrm{B,D}} = r$$

Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης μ_i (packets/sec) και οι εντάσεις φορτίου $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ (Erlangs) είναι:

$$\mu_i = C/\mathrm{E}(L) = (10 \times 10^9)/10^3 = 10^7 \text{ packets/sec}$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_8 = 1.5r \times 10^{-7},\ \rho_9 = \rho_{10} = r \times 10^{-7} \text{ Erlangs}$$

Οι ***γραμμές συμφόρησης*** (στενωποί) είναι οι αμφίδρομες γραμμές διασύνδεσης μεταξύ των κόμβων $\mathrm{A-B}$, $\mathrm{B-C}$, $\mathrm{C-D}$, $\mathrm{D-A}$ με $\rho_i = 1.5r \times 10^{-7}$ Erlangs

Άρα για να έχουν οι γραμμές συμφόρησης ένταση φορτίου 0.5 Erlangs πρέπει οι ρυθμοί ροών πακέτων r να ικανοποιούν τη σχέση $1.5r \times 10^{-7} = 0.5 \Rightarrow r = 10^7/3$ πακέτα/sec

οπότε $\rho_1 = \cdots = \rho_8 = 1/2$ Erlangs (***γραμμές συμφόρησης***) και $\rho_9 = \rho_{10} = 1/3$ Erlangs

ΕΠΙΔΟΣΗ ΔΙΚΤΥΟΥ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΟΥ (2/2)

Απάντηση στο Ερώτημα (**B**) Εφαρμογής Δικτύου Μεταγωγής Πακέτου

Το συνολικό προσφερόμενο φορτίο από άκρο σε άκρο γ είναι:

$$\gamma = r_{\mathrm{A,B}} + r_{\mathrm{A,C}} + r_{\mathrm{A,D}} + r_{\mathrm{B,A}} + r_{\mathrm{B,C}} + r_{\mathrm{B,D}} + r_{\mathrm{C,A}} + r_{\mathrm{C,B}} + r_{\mathrm{C,D}} + r_{\mathrm{D,A}} + r_{\mathrm{D,B}} + r_{\mathrm{D,C}} \Rightarrow$$

$$\gamma = 12r = 4 \times 10^7 \text{ packets/sec}$$

Ο μέσος αριθμός πακέτων στα συστήματα $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{10}$ δίνονται από $\mathrm{E}(n_i) = \rho_i/(1-\rho_i)$:

$$\mathrm{E}(n_1) = \cdots = \mathrm{E}(n_8) = 1,\ \mathrm{E}(n_9) = \mathrm{E}(n_{10}) = 0.5 \text{ packets}$$

$$\text{και } \mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{10} \mathrm{E}(n_i) = 8 \times 1 + 2 \times 0.5 = 9 \text{ packets}$$

Η μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο είναι από τον τύποι του ***Little***:

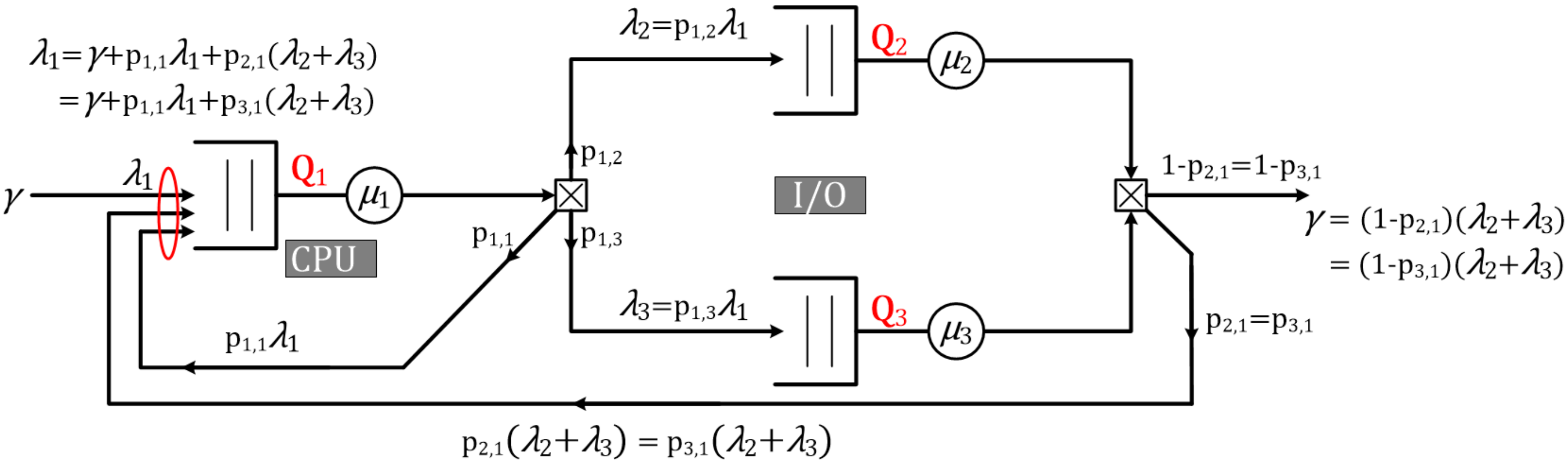
$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\gamma = 9/(4 \times 10^7) \text{ sec}$$

Η μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από το κόμβο A στο κόμβο C δίνεται από:

$$\mathrm{E}(T_{\mathrm{A,C}}) = p\{\mathrm{E}(T_{\mathrm{A,B}}) + \mathrm{E}(T_{\mathrm{B,C}})\} + (1-p)\{\mathrm{E}(T_{\mathrm{A,D}}) + \mathrm{E}(T_{\mathrm{D,C}})\} =$$

$$p\{1/(\mu_1 - \lambda_1) + 1/(\mu_3 - \lambda_3)\} + (1-p)\{1/(\mu_8 - \lambda_8) + 1/(\mu_6 - \lambda_6)\} = 4/10^7 \text{ sec}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (1/3)



Θεωρείστε υπολογιστικό σύστημα που εξυπηρετεί κατά μέσο όρο γ εντολές/sec που υποβάλλονται σαν διαδικασία Poisson. Το σύστημα αποτελείται από μια CPU που εξυπηρετεί την εντολή επιμερισμένη σε τμήματα (quanta ή time-slices) και υποσύστημα I/O (δύο δίσκοι) που εξυπηρετεί επαναλαμβανόμενες ενδιάμεσες κλήσεις σχετικές με την εντολή (π.χ. για ανταλλαγή δεδομένων και αναζήτηση υποπρογραμμάτων), ενώ μεσολαβεί για την τελική έξοδο - απάντηση

ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (2/3)

- Κάθε εντολή εξυπηρετείται από την CPU του συστήματος, επιμερισμένη σε $\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}$ τμήματα (quanta ή time-slices) την εξυπηρέτηση των οποίων ακολουθεί κλήση I/O (ενδιάμεση ή τελική). Το υποσύστημα εξυπηρέτησης CPU αναπαρίσταται σαν ουρά αναμονής $\mathbf{Q}_1$ με εκθετική εξυπηρέτηση ρυθμού μ_1 quanta/sec
- Η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}$ έχει μέσο όρο $\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})$ quanta και αναπαρίσταται σαν ανάδραση στο υποσύστημα CPU με τυχαία πιθανότητα $\mathrm{p}_{1,1}$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}) = \left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + 2\mathrm{p}_{1,1}\left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + 3\mathrm{p}_{1,1}^2\left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + 4\mathrm{p}_{1,1}^3\left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + \cdots = 1/(1-\mathrm{p}_{1,1})$$

ή

$$\mathrm{p}_{1,1} = \frac{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}) - 1}{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})}$$

- Την επεξεργασία των τμημάτων $\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}$ μιας εντολής ακολουθεί κλήση I/O. Το υποσύστημα I/O αποτελείται από δύο συστήματα εξυπηρέτησης τα οποία αναπαρίστανται σαν ουρές αναμονής $\mathbf{Q}_2$ και $\mathbf{Q}_3$ με εκθετική εξυπηρέτηση ρυθμών μ_2 και μ_3 κλήσεις/sec. Η επιλογή $\mathbf{Q}_2$ ή $\mathbf{Q}_3$ γίνεται τυχαία με πιθανότητες $\mathrm{p}_{1,2}$ και $\mathrm{p}_{1,3}$ αντίστοιχα, $\mathrm{p}_{1,1} + \mathrm{p}_{1,2} + \mathrm{p}_{1,3} = 1$
- Θεωρούμε πως κάθε εντολή παράγει κατά μέσο όρο $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right)$ κλήσεις οι οποίες είτε επανέρχονται στο υποσύστημα CPU με πιθανότητες $\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1}$ ή ολοκληρώνεται με πιθανότητα $1-\mathrm{p}_{2,1} = 1-\mathrm{p}_{3,1}$

$$\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1} = \frac{\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right) - 1}{\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right)}$$

- Με $\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}) = 5$ quanta, $\mu_1 = 10$ quanta/sec, $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right) = 3$ κλήσεις, $\mu_2 = 5$ κλήσεις/sec, $\mu_3 = 3$ κλήσεις/sec και αριθμό κλήσεων προς το $\mathbf{Q}_2$ διπλάσιων κατά μέσο όρο από το $\mathbf{Q}_3$, ζητείται ο μέγιστος ρυθμός $\gamma_{\max}$ εντολών/sec που οδηγεί το σύστημα σε κορεσμό. Για $\gamma = \gamma_{\max}/2$ υπολογίστε τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μιας τυχαίας εντολής

ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (3/3)

Με τις παραδοχές του Θεωρήματος ***Jackson*** έχω το ανοικτό δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1 $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ με μέσους ρυθμούς εισόδου:

$$\lambda_1 = \gamma + \mathrm{p}_{1,1}\lambda_1 + \mathrm{p}_{2,1}(\lambda_2 + \lambda_3),\ \lambda_2 = \mathrm{p}_{1,2}\lambda_1,\ \lambda_3 = \mathrm{p}_{1,3}\lambda_1$$

Για τα $\mathrm{p}_{1,1}$ **,** $\mathrm{p}_{2,1}$και $\mathrm{p}_{3,1}$ ισχύουν $\mathrm{p}_{1,1} = \frac{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})-1}{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})}$ και $\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1} = \frac{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}})-1}{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}})}$, άρα

$\mathrm{p}_{1,1} = 4/5$, $\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1} = 2/3$, $\mathrm{p}_{1,1} + \mathrm{p}_{1,2} + \mathrm{p}_{1,3} = 1$ και $\mathrm{p}_{1,2} = 2\mathrm{p}_{1,3}$ άρα $\mathrm{p}_{1,3} = 1/15$, $\mathrm{p}_{1,2} = 2/15$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1/15,\ \lambda_3 = \lambda_1/15,\ \lambda_1 = \gamma + 4\lambda_1/5 + 2\lambda_1/(3 \times 5) \text{ άρα}$$
$$\lambda_1 = 15\gamma, \qquad \lambda_2 = 2\gamma, \qquad \lambda_3 = \gamma$$

Για ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i (πελάτες/sec) η χρησιμοποίηση $\rho_i = \lambda_i / \mu_i < 1$ Erlang είναι:

$$\rho_1 = (15/10)\gamma,\ \rho_2 = (2/5)\gamma,\ \rho_3 = 0.5\gamma$$

Το ***στοιχείο συμφόρησης*** (στενωπός) που οδηγεί το σύστημα σε κορεσμό είναι το $\mathbf{Q}_1$ για $\rho_1 = 1.5\gamma_{\max} = 1$:

$$\gamma_{\max} = 2/3 \text{ εντολές/sec}$$

Για $\gamma = \gamma_{\max}/2 = 1/3$ εντολές/sec έχουμε:

$$\rho_1 = 1/2 \text{ Erlang},\ \rho_2 = 2/15 \text{ Erlang},\ \rho_3 = 1/6 \text{ Erlang και}$$
$$\mathrm{E}(n_i) = \rho_i/(1-\rho_i) \Rightarrow \mathrm{E}(n_1) = 1,\ \mathrm{E}(n_2) = 4/26,\ \mathrm{E}(n_3) = 5/25$$
$$\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \mathrm{E}(n_1) + \mathrm{E}(n_2) + \mathrm{E}(n_3) = 1.35 \text{ εντολές}$$

Μέση Απόκριση / Εντολή (***Average Response Time***) από τον τύπο του ***Little***: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\gamma = 4.05$ sec