ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems

Ανάλυση Μεταγωγής Πακέτου - Μοντέλο M/M/1

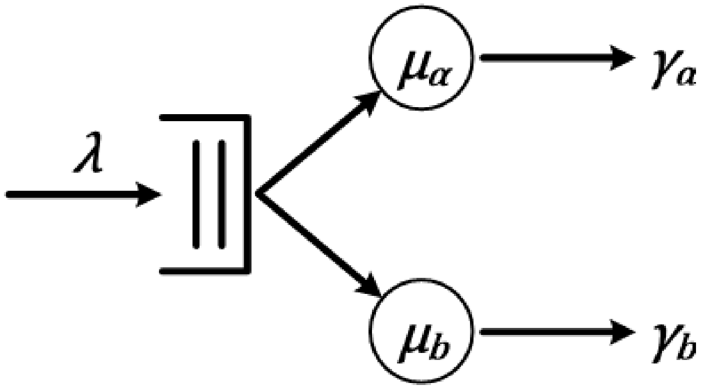
Βασίλης Μάγκλαρης

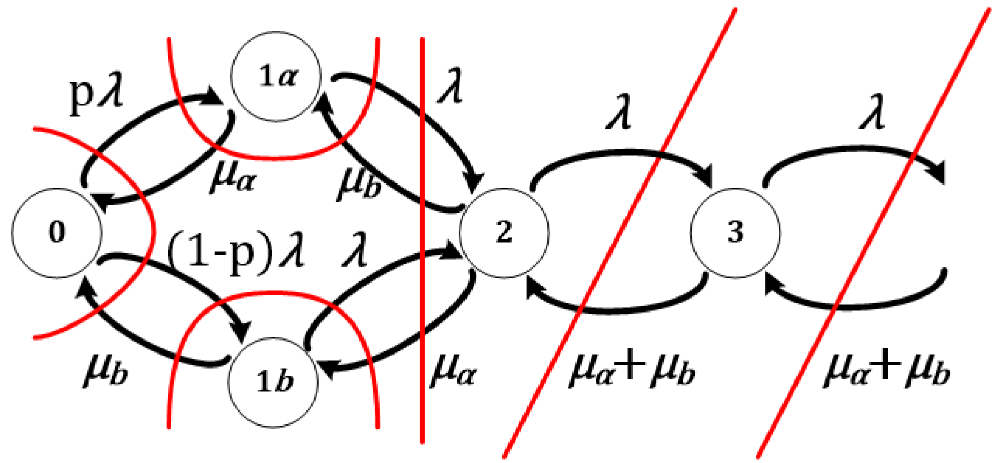
maglaris@netmode.ntua.gr

25/4/2018

ΟΥΡΑ Μ/Μ/2 (επανάληψη)

- Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- 2 ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $(\alpha), (b)$ με άνισους ρυθμούς μ_α και μ_b
- Άπειρη Χωρητικότητα
- Άφιξη σε άδειο σύστημα δρομολογείται στον (α) με πιθανότητα p και στον (b) με πιθανότητα $(1-\mathrm{p})$





Εξισώσεις Ισορροπίας:

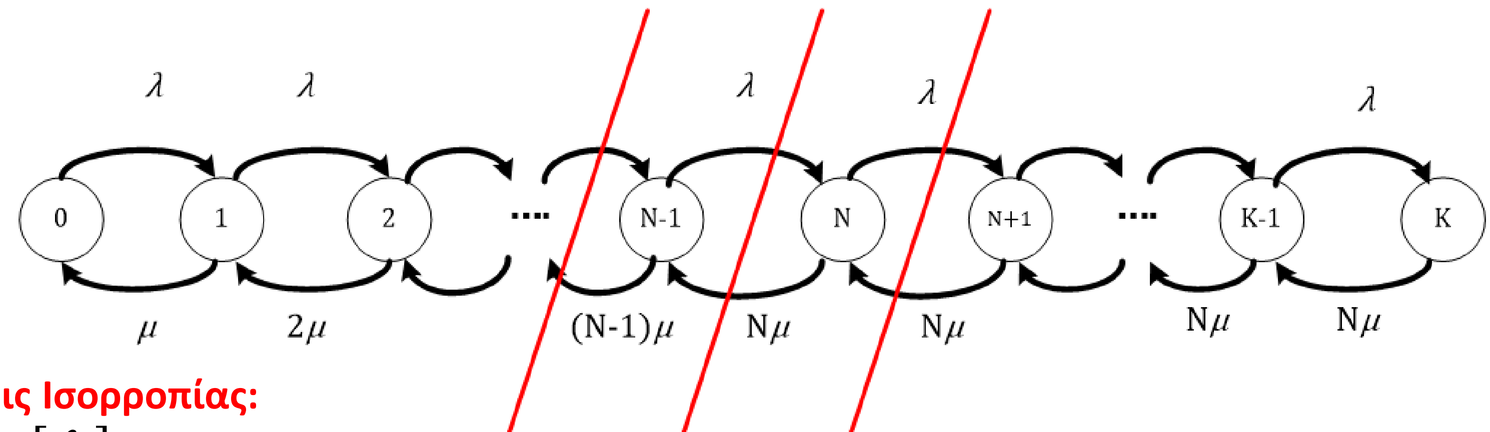
$$\lambda P_0 = \mu_\alpha P_{1\alpha} + \mu_b P_{1b}$$
$$(\lambda + \mu_\alpha) P_{1\alpha} = \mathrm{p}\lambda P_0 + \mu_b P_2$$
$$(\lambda + \mu_b) P_{1b} = (1-\mathrm{p})\lambda P_0 + \mu_\alpha P_2$$
$$\lambda(P_{1\alpha} + P_{1b}) = (\mu_\alpha + \mu_b) P_2, \ \lambda P_k = (\mu_a + \mu_b) P_{k+1}, \ k = 2,3,\ldots$$
$$P_0 + P_{1\alpha} + P_{1b} + P_2 + P_3 + \cdots = 1, \quad \lambda/(\mu_\alpha + \mu_b) < 1$$ για σύγκληση (εργοδικότητα)

Βαθμοί Χρησιμοποίησης – Ρυθμαποδόσεις Εξυπηρετητών:

$$U_\alpha = 1 - P_0 - P_{1b} \qquad \gamma_\alpha = \mu_\alpha U_\alpha$$
$$U_b = 1 - P_0 - P_{1\alpha} \qquad \gamma_b = \mu_b U_b$$
$$\gamma = \lambda = \gamma_a + \gamma_b$$

ΟΥΡΑ M/M/N/K (*επανάληψη*)

- Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- N ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές με ίσους ρυθμούς μ
- Χωρητικότητα K, $\mathrm{N} \leq \mathrm{K}$ (π.χ. **call center** με N εξυπηρετητές & δυνατότητα αναμονής μέχρι $\mathrm{K}-\mathrm{N}$ κλήσεις)
- Μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης στη κατάσταση k:
    - $\mu_k = k\mu, \quad k = 1,2,\dots,\mathrm{N}$
    - $\mu_k = \mathrm{N}\mu, \quad k = \mathrm{N}, \mathrm{N}+1, \dots, \mathrm{K}-1, \mathrm{K}$
- Εργοδική κατάσταση $n(t)$: Αριθμός πελατών στο σύστημα, αδιάφορα από χρήση συγκεκριμένων εξυπηρετητών (π.χ. σε σύστημα M/M/2, $\mu_a = \mu_b = \mu, \; P_1 = P_{1\alpha} + P_{1b}$



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{k\mu}\right] P_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \dots, \mathrm{N}-1$$

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{\mathrm{N}\mu}\right] P_{k-1}, \qquad k = \mathrm{N}, \mathrm{N}+1, \dots, \mathrm{K}-1, \mathrm{K}$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{\mathrm{K}-1} + \; + P_{\mathrm{K}} = 1, \qquad P_{\mathrm{K}} = P_{\text{blocking}}, \qquad \gamma = \lambda(1 - P_{\text{blocking}})$$

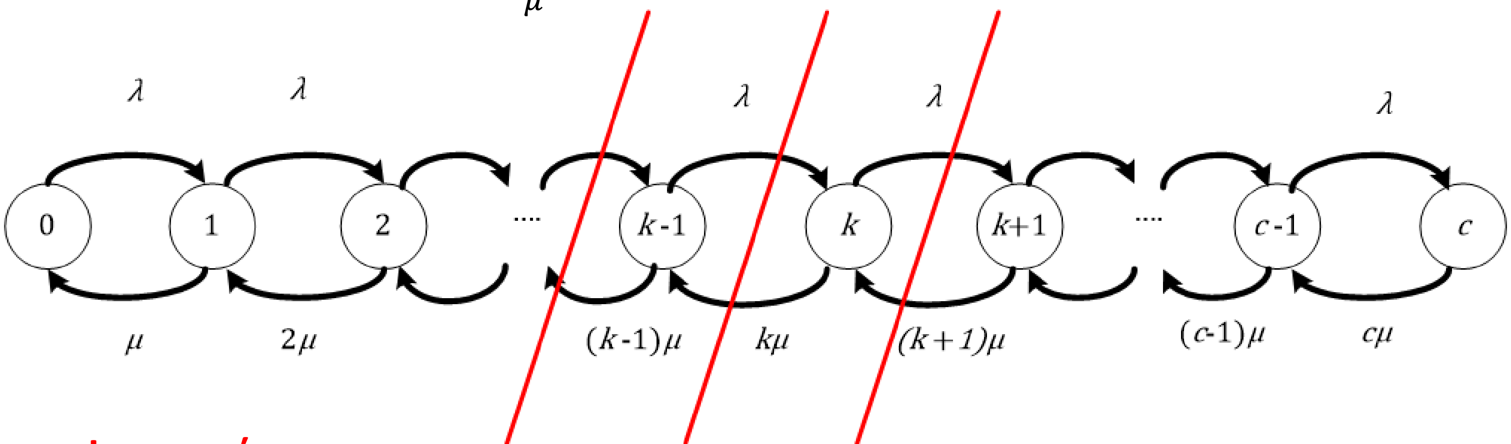
$$P_{\text{waiting}} = P_{\mathrm{N}} + P_{\mathrm{N}+1} + \cdots + P_{\mathrm{K}} = 1 - (P_0 + P_1 + \cdots + P_{\mathrm{N}-1})$$ (***Erlang-C Formula***)

ΟΥΡΑ M/M/*c*/*c* (*επανάληψη*)

(τηλεφωνικό κέντρο με *c* εξωτερικές γραμμές, trunks)

- Αφίξεις Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό $\lambda_n = \lambda$ (εξωτερικές κλήσεις - τηλεφωνήματα/sec)
- c ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές (εξωτερικές γραμμές τηλεφωνικού κέντρου)
- Χωρητικότητα c πελάτες (τηλεφωνήματα, εξωτερικές κλήσεις)
- Ρυθμοί εξυπηρέτησης στη κατάσταση k:

$\mu_k = k\mu, \; k = 1,2,\ldots,c$ $\quad \frac{1}{\mu} = \mathrm{E}(s)$: Μέση Διάρκεια Τηλεφωνήματος (π.χ. 3 min ή 180 sec)



Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$P_k = \left[\frac{\lambda}{k\mu}\right] P_{k-1} = \left(\frac{\rho^k}{k!}\right) P_0, \; k = 1,2,\ldots,c \qquad \rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu} \text{ Erlangs}$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_{c-1} + P_c = 1 \Rightarrow \mathrm{P}_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c} \frac{\rho^k}{k!}}$$

$$P_c = P_{\text{blocking}} = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{k=1}^{c} \frac{\rho^k}{k!}} \triangleq \mathrm{B}(\rho, c)$$ (***Erlang-B Formula***)

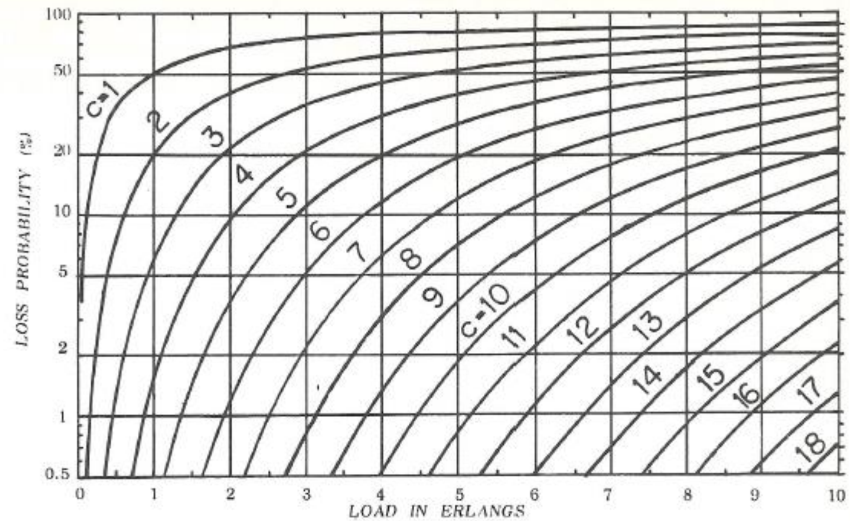
ΠΙΝΑΚΕΣ Erlang $\mathrm{B}(\rho, c)$

(επανάληψη)

Αναδρομικός Υπολογισμός

$$\mathrm{B}(\rho, 0) = 1$$

$$\mathrm{B}(\rho, n) = \frac{\rho \mathrm{B}(\rho, n-1)}{\rho \mathrm{B}(\rho, n-1) + n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, c$$



ρ	$c = 1$	2	3	4	5	6	7	8
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.25	.2000	.0244	.0020	.0001	**	*	*	*
0.50	.3333	.0769	.0127	.0016	.0002	**	*	*
0.75	.4286	.1385	.0335	.0062	.0010	.0001	**	*
1.00	.5000	.2000	.0625	.0154	.0031	.0005	.0001	**
1.25	.5556	.2577	.0970	.0294	.0073	.0015	.0003	**
1.50	.6000	.3103	.1343	.0480	.0142	.0035	.0008	.0001
1.75	.6364	.3577	.1726	.0702	.0240	.0070	.0017	.0004
2.00	.6667	.4000	.2105	.0952	.0367	.0121	.0034	.0009
2.25	.6923	.4378	.2472	.1221	.0521	.0192	.0061	.0017
2.50	.7143	.4717	.2822	.1499	.0697	.0282	.0100	.0031
2.75	.7333	.5021	.3152	.1781	.0892	.0393	.0152	.0052
3.00	.7500	.5294	.3462	.2062	.1101	.0522	.0219	.0081
3.25	.7647	.5541	.3751	.2336	.1318	.0666	.0300	.0121
3.50	.7778	.5765	.4021	.2603	.1541	.0825	.0396	.0170
3.75	.7895	.5968	.4273	.2860	.1766	.0994	.0506	.0232
4.00	.8000	.6154	.4507	.3107	.1991	.1172	.0628	.0304
4.25	.8095	.6324	.4725	.3343	.2213	.1355	.0760	.0388
4.50	.8182	.6480	.4929	.3567	.2430	.1542	.0902	.0483
4.75	.8261	.6624	.5119	.3781	.2643	.1730	.1051	.0587
5.00	.8333	.6757	.5287	.3983	.2849	.1919	.1205	.0701
5.25	.8400	.6880	.5463	.4176	.3048	.2106	.1364	.0822
5.50	.8462	.6994	.5618	.4358	.3241	.2290	.1525	.0949
5.75	.8519	.7101	.5764	.4531	.3426	.2472	.1688	.1082
6.00	.8571	.7200	.5902	.4696	.3604	.2649	.1851	.1219
6.25	.8621	.7293	.6031	.4852	.3775	.2822	.2013	.1359
6.50	.8667	.7380	.6152	.4999	.3939	.2991	.2174	.1501
6.75	.8710	.7462	.6267	.5140	.4096	.3155	.2333	.1644
7.00	.8750	.7539	.6376	.5273	.4247	.3313	.2489	.1788
7.25	.8788	.7611	.6478	.5401	.4392	.3467	.2642	.1932

ρ	$c = 9$	10	11	12	13	14	15	16
0.00	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.25								
0.50								
0.75								
1.00	*							
1.25	**							
1.50	**	*						
1.75	.0001	**	*					
2.00	.0002	**	**					
2.25	.0004	.0001	**	*				
2.50	.0009	.0002	.0001	**	*			
2.75	.0016	.0004	.0001	**	**			
3.00	.0027	.0008	.0002	.0001	**	*		
3.25	.0043	.0014	.0004	.0001	**	**		
3.50	.0066	.0023	.0007	.0002	.0001	**	*	
3.75	.0096	.0036	.0012	.0004	.0001	**	**	
4.00	.0133	.0053	.0019	.0006	.0002	.0001	**	*
4.25	.0180	.0076	.0029	.0010	.0003	.0001	**	**
4.50	.0236	.0105	.0043	.0016	.0006	.0002	.0001	**
4.75	.0301	.0141	.0060	.0024	.0009	.0003	.0001	**
5.00	.0375	.0184	.0083	.0034	.0013	.0005	.0002	.0001
5.25	.0457	.0234	.0111	.0048	.0019	.0007	.0003	.0001
5.50	.0548	.0293	.0144	.0066	.0028	.0011	.0004	.0001
5.75	.0647	.0358	.0184	.0087	.0039	.0016	.0006	.0002
6.00	.0751	.0431	.0230	.0114	.0052	.0022	.0009	.0003
6.25	.0862	.0511	.0282	.0145	.0069	.0031	.0013	.0005
6.50	.0978	.0598	.0341	.0181	.0090	.0042	.0018	.0007
6.75	.1098	.0690	.0406	.0223	.0115	.0055	.0025	.0010
7.00	.1221	.0787	.0477	.0271	.0144	.0071	.0033	.0015
7.25	.1347	.0890	.0554	.0324	.0177	.0091	.0044	.0020

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ (*επανάληψη*)

- Τηλεφωνικό Κέντρο με 7 εξωτερικές γραμμές προωθεί κίνηση (προς τις 2 κατευθύνσεις) με μέσο ρυθμό κλήσεων 2 κλήσεις το λεπτό με μέση διάρκεια κλήσης 3 min
- Θεωρώ ότι οι εξωτερικές κλήσεις ακολουθούν διαδικασία ***Poisson*** με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ κλήσεις/min και χρόνο εξυπηρέτησης ***Εκθετικό*** με μέση διάρκεια $1/\mu = 3$ min, άρα το συνολικό προσφερόμενο φορτίο (***offered traffic***) είναι

  $\rho = \lambda/\mu = 6$ Erlangs
- Υποθέτουμε πως οι κλήσεις που δεν βρίσκουν γραμμή χάνονται οριστικά. Άρα η πιθανότητα απώλειας δίνεται από τον τύπο

  $\mathrm{B}(\rho, c) = \mathrm{B}(6{,}7) = 18.51\%$
- Το εξυπηρετούμενο φορτίο (***carried traffic***) είναι

  $\rho[1 - \mathrm{B}(\rho, c)] = \frac{\lambda}{\mu}[1 - \mathrm{B}(\rho, c)] = \frac{\gamma}{\mu} = 4.8894$ Erlangs
- Το φορτίο υπερχείλισης (***overflow traffic***) είναι

  $\rho B(\rho, c) = 1.1106$ Erlangs

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ (*επανάληψη*)

- Τηλεφωνικό Κέντρο με c εξωτερικές γραμμές (trunks) προωθεί κίνηση (προς τις 2 κατευθύνσεις) με μέσο ρυθμό κλήσεων 2 κλήσεις το λεπτό με μέση διάρκεια κλήσης 3 min.
- Θεωρώ ότι οι εξωτερικές κλήσεις ακολουθούν διαδικασία ***Poisson*** με μέσο ρυθμό $\lambda = 2$ κλήσεις/min και χρόνο εξυπηρέτησης ***Εκθετικό*** με μέση διάρκεια $\frac{1}{\mu} = 3$ min, άρα το συνολικό προσφερόμενο φορτίο (***offered traffic***) είναι

  $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 6 \text{ Erlangs}$$
- Υποθέτουμε πως οι κλήσεις που δεν βρίσκουν γραμμή χάνονται οριστικά. Ζητείται ο απαιτούμενος αριθμός εξωτερικών γραμμών (trunks) c ώστε ο ρυθμός απωλειών (***Grade of Service, GOS***) να είναι μικρότερος από 0.3%
- Από τους πίνακες προκύπτει πως $\mathrm{B}(6,13) = 0.52\%$ και $\mathrm{B}(6,14) = 0.24\%$, άρα οι απαιτήσεις καλύπτονται με ελάχιστο αριθμό εξωτερικών γραμμών $c = 14$ trunks

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΤΑΓΩΓΕΑ ΠΑΚΕΤΟΥ - ΜΟΝΤΕΛΟ Μ/Μ/1

Βελτιστοποίηση Μήκους Πακέτου σε Δίκτυα τύπου Internet

- 10 υπολογιστές (Η/Υ) διασυνδέονται σε Δίκτυο μέσω μεταγωγέα πακέτου (***Router*** ή ***Ethernet Switch***) που τα προωθεί προς τον προορισμό τους. Η ταχύτητα της πολυπλεγμένης εξόδου (***trunk port***) είναι $C = 100$ Mbps
- Τα δεδομένα παράγονται στους Η/Υ σε μορφή πακέτων (πλαισίων) μεταβλητού μήκους L bits (***data payload***). Θεωρείστε πως κάθε Η/Υ παράγει δεδομένα που αντιστοιχούν σε 1 Mbps κατά μέσο όρο
- Οι Η/Υ προσθέτουν σε κάθε πακέτο επικεφαλίδα (***header***) με υποχρεωτικές πληροφορίες πρωτοκόλλου (***protocol overhead*** με διευθύνσεις, σηματοδοσία ελέγχου, ανίχνευσης λαθών κλπ.) μήκους 200 bits
- Θεωρείστε πως ο μεταγωγέας έχει άπειρη χωρητικότητα αποθήκευσης πακέτων, το συνολικό μήκος πακέτου $(L + 200)$ bits είναι κατά προσέγγιση ***Εκθετικά*** κατανεμημένο και πως η συνολική ροή πακέτων γίνεται με διαδικασία ***Poisson***
- Βρείτε το μέσο ωφέλιμο μήκος πακέτου $\mathrm{E}(L)$ που να βελτιστοποιεί την μέση καθυστέρηση προώθησης πακέτου στο μεταγωγέα
- Θεωρείστε πως η ανάστροφη ροή πακέτων ***Δίκτυο→ Η/Υ*** γίνεται ανεξάρτητα από την ροή ***Η/Υ→ Δίκτυο*** (FDX) και πως η στατιστική συμπεριφορά των δύο κατευθύνσεων είναι συμμετρική

Λύση

- Θεωρώ μοντέλο ουράς M/M/1 με

  $\lambda = \frac{10\times10^6}{\mathrm{E}(L)} = 10^7/\mathrm{E}(L)$ packets/sec

  $\mu = \frac{C}{200+E(L)}$ sec^{-1} $= 10^8/[200 + E(L)]$ sec^{-1}

- Η μέση καθυστέρηση δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\frac{10^8}{200+\mathrm{E}(L)} - \frac{10^7}{\mathrm{E}(L)}}$$

- Με $\mathrm{E}(L) = x$, ελαχιστοποιώ την συνάρτηση

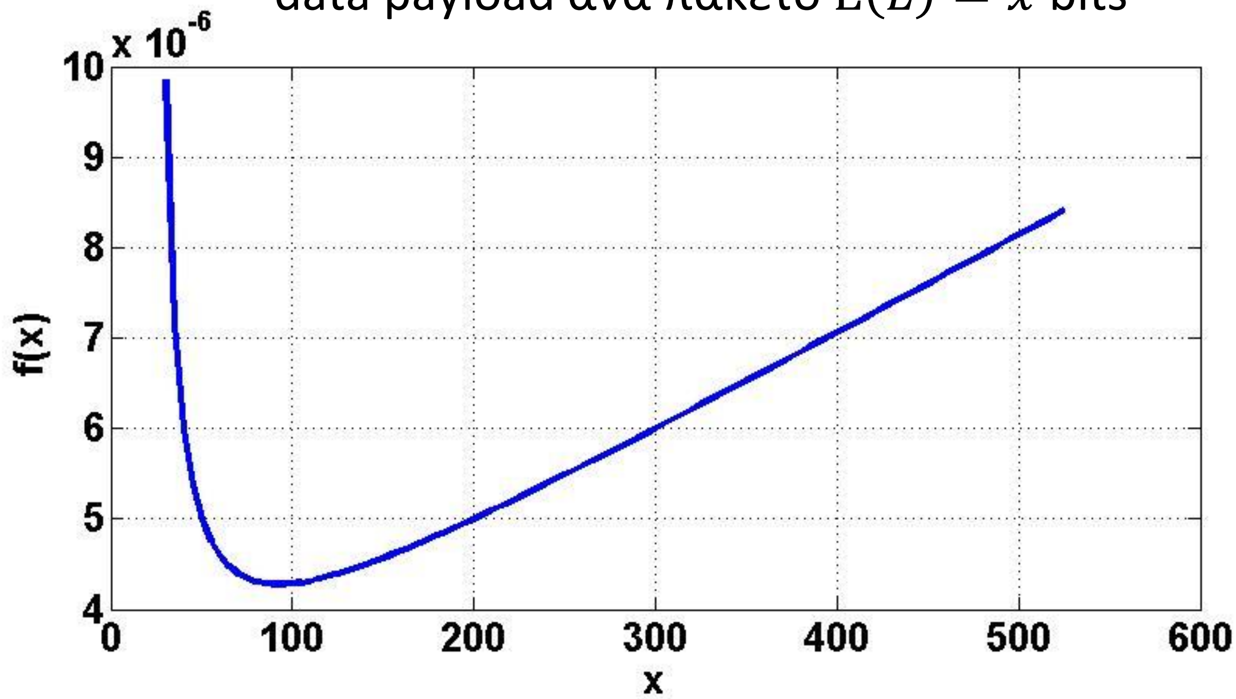
$$f(x) = \frac{1}{\frac{10^8}{200+x} - \frac{10^7}{x}} = \frac{x(200+x)}{10^7(9x-200)}$$

  και βρίσκω το βέλτιστο μέσο payload ανά πακέτο $\mathrm{E}(L) = x$ όταν $\frac{df(x)}{dx} = 0 \Rightarrow$

$$\mathrm{optimal}\{\mathrm{E}(L)\} \cong 92.495 \text{ bits}$$

- **Προσοχή:** Για εργοδικότητα πρέπει $\rho = \lambda/\mu < 1$ και $\mathrm{E}(L) > 200/9 = 22.222$ bits

$\mathrm{E}(T) = f(x)$ σαν συνάρτηση του μέσου data payload ανά πακέτο $\mathrm{E}(L) = x$ bits



- **Μεγάλο μήκος ωφέλιμου φορτίου** $E(L)$: Μεγάλη καθυστέρηση λόγω αυξημένων απαιτήσεων πακετοποίησης μεγάλων πακέτων (+ προβλήματα μεγάλης πιθανότητας σφάλματος ⇒ συχνές επαναμεταδόσεις και ανάγκη μεγάλου μεγέθους buffers)
- **Μικρό μήκος ωφέλιμου φορτίου** $\mathrm{E}(L)$: Μεγάλες απαιτήσεις πρόσθετου σταθερού overhead πρωτοκόλλων σε σχέση με το ωφέλιμο φορτίο πακέτων

Τα πακέτα έχουν ελάχιστο μέσο μέγεθος ωφέλιμου φορτίου $\mathrm{E}(L) = 22.222$ bits (***data payload***), αλλιώς ο μεταγωγέας πλημμυρίζει από υπερβολικό αριθμό μικρών πακέτων με κυρίαρχο το αναγκαστικό ***protocol overhead*** (200 bits/πακέτο) και ελάχιστο ωφέλιμο φορτίο L