# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
# Queuing Systems

## Διαδικασίες Birth-Death, Ουρές Markov:

1. Διαγράμματα Μεταβάσεων Εργοδικών Καταστάσεων
2. Εξισώσεις Ισορροπίας
3. Προσομοιώσεις

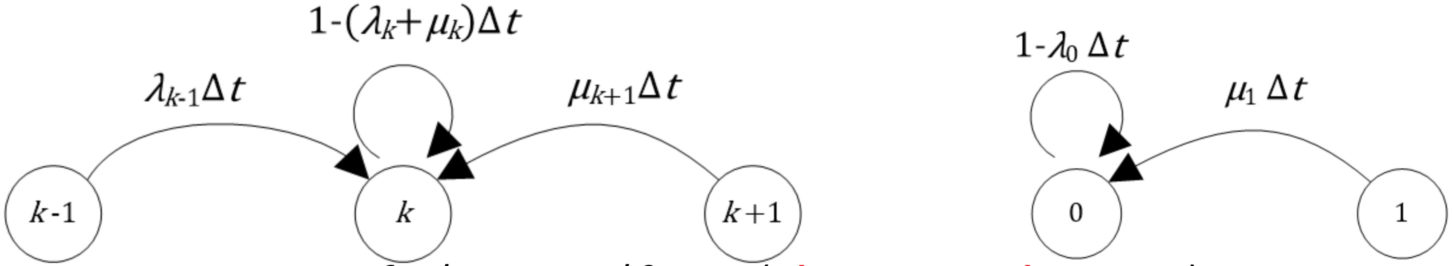
**Βασίλης Μάγκλαρης**

maglaris@netmode.ntua.gr

**28/3/2018**

# ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (1/3) *επανάληψη*

- Birth-Death Process: Διάγραμμα ***Πιθανοτήτων Μεταβάσεων*** σε χρόνο $\Delta t \to 0$ προς $n(t) = k$

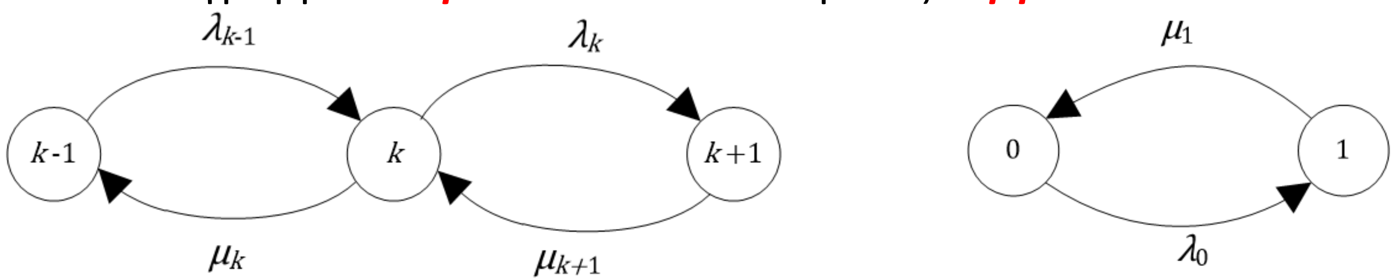



Εξισώσεις Μετάβασης (***Chapman - Kolmogorov***):

$$\mathrm{P}_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t \mathrm{P}_{k-1}(t-\Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t \mathrm{P}_{k+1}(t-\Delta t) + [1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta \mathrm{t}]\mathrm{P}_k(\mathrm{t}-\Delta\mathrm{t}), \qquad k \geq 1$$

$$\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t) \;=\; \mu_1\,\Delta t\;\mathrm{P}_1(t-\Delta t) \;+\; (1 - \;\lambda_0 \Delta t)\;\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t-\Delta t)$$

- Birth-Death Process: Διάγραμμα ***Ρυθμών Μεταβάσεων*** μεταξύ ***Εργοδικών*** Καταστάσεων




**Εξισώσεις Ισορροπίας**:

$(\lambda_k+\mu_k)P_k = \;\lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}$ για $k \geq 1$ και $\lambda_0 P_0 \;=\; \mu_1 P_1$

**Σχετικές Πιθανότητες Μεταβάσεων** $k \to (k+1), k \to (k-1)$:

$\mathrm{P}[k \to (k+1)/\text{μετάβαση}] = \lambda_k/(\lambda_k+\mu_k)$, $\;\mathrm{P}[k \to (k-1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda_k+\mu_k)$

**Dwell Time** - Χρόνος Παραμονής στην $n(t) = k$ μέχρι την επόμενη μετάβαση

**Εκθετική τυχαία μεταβλητή** $d_k$ **με μέσο** $1/(\lambda_k+\mu_k)$ : Η μικρότερη δύο ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μέχρι *(1)* την επόμενη άφιξη με μέσο $1/\lambda_k$ ή *(2)* την ολοκλήρωση εξυπηρέτησης με μέσο $1/\mu_k$

$d_k = \min(x,y)\,, F_{d_k}(\tau) = \mathrm{P}\{d_k \leq \tau\} = 1 - \mathrm{P}\{d_k > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_k+\mu_k)\tau}$ διότι

$$\mathrm{P}\{d_k > \tau\} = \mathrm{P}\{x > \tau, y > \tau\} = \mathrm{P}\{x > \tau\}\mathrm{P}\{y > \tau\} = e^{-\lambda_k\tau}e^{-\mu_k\tau} = e^{-(\lambda_k+\mu_k)\tau}$$

# ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (2/3) *επανάληψη*

- Απείρως επισκέψιμες καταστάσεις $\boldsymbol{s} = n(t)$ ***positive recurrent states***: Με μη μηδενικές εργοδικές πιθανότητες $\mathrm{P}\{n(t) = k\} = P_k(t) \to P_k > 0,\ k = 0,1,2,\dots$

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης $\mathrm{T}$ ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων από και προς την κατάσταση $\boldsymbol{s}$ :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ } \boldsymbol{s}\} = \#\{\text{ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ } \boldsymbol{s}\}$$

***Σφαιρική Ισορροπία***, ***Global Balance Equations***

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης $\mathrm{T}$ ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων μεταξύ δύο (όχι αναγκαστικά γειτονικών) καταστάσεων $\boldsymbol{s}_1$ και $\boldsymbol{s}_2$ :

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2\} = \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1\}$$

***Τοπική Ισορροπία, Local Balance Equations***

- Λόγω ***εργοδικότητας*** σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης $\mathrm{T}$, με $\mathrm{T}_1$ και $\mathrm{T}_2$ τους συνολικούς χρόνους παραμονής στις $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$ :

(1) $\qquad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2\} = \mathrm{T}_1 \times r_{1,2}$

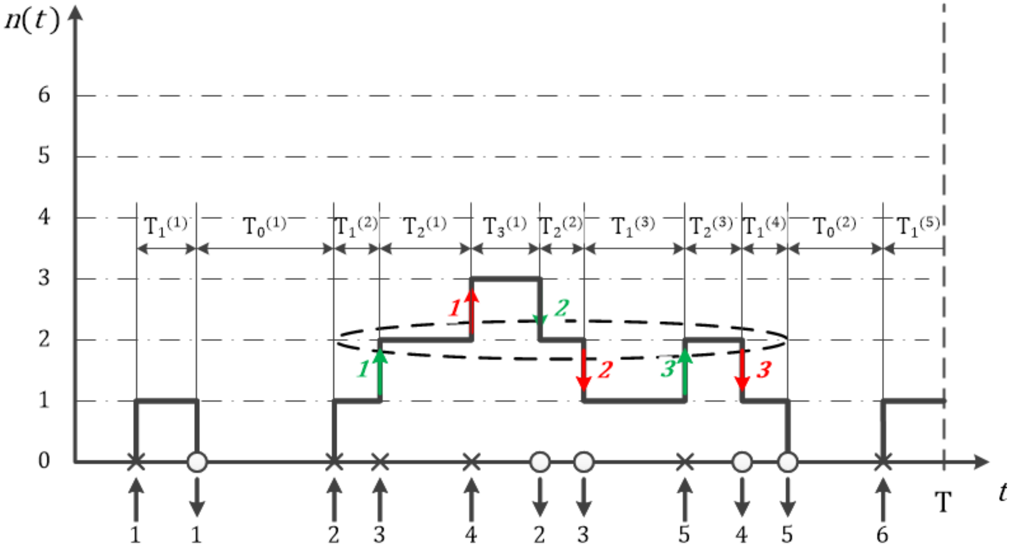
(2) $\qquad \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1\} = \mathrm{T}_2 \times r_{2,1}$

*Όπου* $r_{1,2}$ και $r_{2,1}$ οι μέσοι ρυθμοί μετάβασης από $\boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2$ και $\boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1$

- Λόγω ***ισορροπίας:*** (1) = (2) και $r_{1,2} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}} = r_{2,1} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}}$ ή

$$r_{1,2} P_1 = r_{2,1} P_2 \quad \textbf{\textit{Local Balance Equations}}$$

# ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (3/3) *επανάληψη*




**Σχηματική Απεικόνιση**

Εξισώσεις Ισορροπίας στην Εργοδική Κατάσταση

Χρόνος Παρατήρησης Δείγματος $n(t)$: T

**Global Balance Equation**

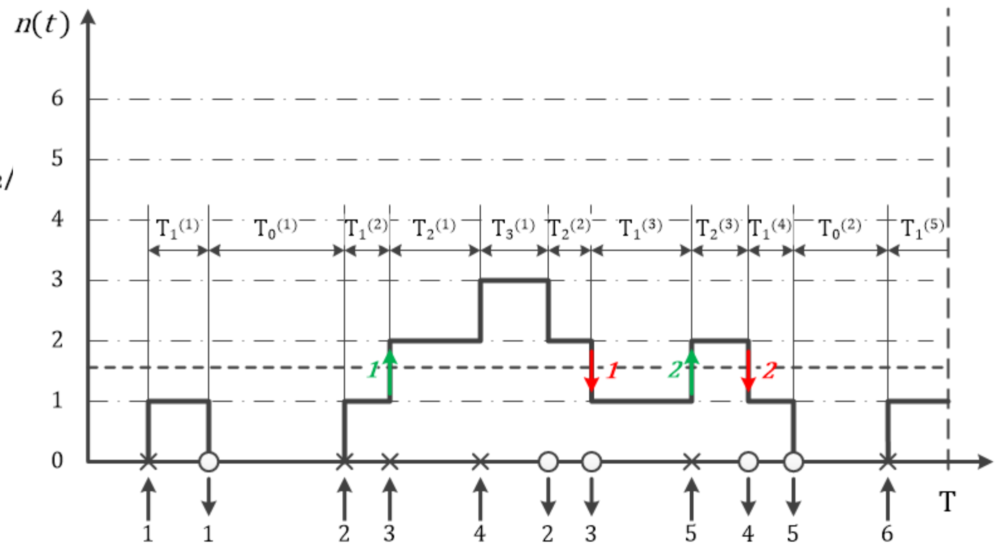
$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$

$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}$ , $T_3 = T_3^{(1)}$

(State 2: Transitions In = Transitions Out)

$\lambda T_1 + \mu T_3 \sim \lambda T_2 + \mu T_2 \Rightarrow (\lambda T_1 + \mu T_3)/T \sim (\lambda + \mu)\ (T_2/$

$\Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2$




**Local Balance Equation**

$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$

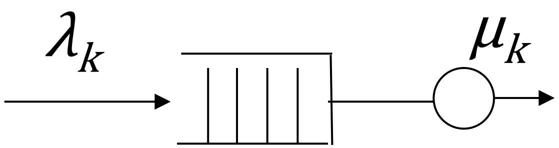
$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}$

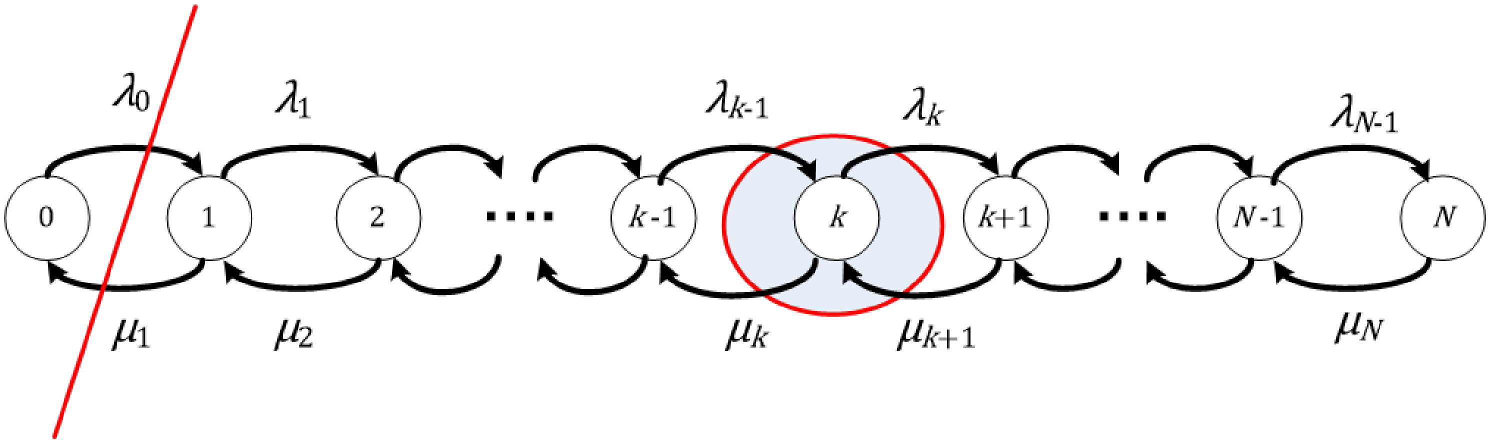
(Transitions 1->2 = Transitions 2->1)

$\lambda T_1 \sim \mu T_2 \Rightarrow \lambda (T_1/T) \sim \mu (T_2/T) \Rightarrow \lambda P_1 = \mu P_2$

# ΟΥΡΑ M/M/1/*N* (1/2) *επανάληψη*

- Συστήματα M/M/1/*N* με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)
  ***(State Dependent M/M/1/N Queues)***




**Local Balance Equation**

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \qquad k = 1, 2, \dots N$$

**Global Balance Equation**

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$
$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \qquad k = 1, \dots, N$$

**Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων**

$$P_0 + \cdots + P_N = 1$$

# ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/*N* (2/2) *επανάληψη*

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

  $\lambda_k = \lambda$, Poisson, $k = 1,2,\ldots,N$
- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

  $\mu_k = \mu,\ k = 1,2,\ldots,N$

  Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης $s, E(s) = 1/\mu$
- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

  $P_k = \rho^k P_0,\ \ k = 0,1,2,\ldots,N$

  $P_0 + P_1 + \cdots + P_{N-1} + P_N = 1$

  $\rho = \lambda/\mu$ Erlangs (η Μ/Μ/1/*N* είναι **πάντα ευσταθής** γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)
- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \qquad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N+1}, \qquad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{blocking} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$\mathrm{E}[n(t)] \rightarrow \mathrm{E}(k) = \sum_{k=1}^{N} kP_k = \rho\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(k)/\gamma = \mathrm{E}(k)/[\lambda(1 - P_N)]$

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (1/2)

- Σε στοχαστικό σύστημα ***Birth-Death*** με αφίξεις (γεννήσεις) σταθερού μέσου ρυθμού $\lambda$ ανεξάρτητου του πληθυσμού $n(t) = k$ (***ομοιογενείς αφίξεις Poisson*** με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$ αφίξεις/sec) οι εργοδικές πιθανότητες (αν υπάρχουν) μπορούν να υπολογισθούν σαν λόγος αφίξεων που βρίσκουν το σύστημα στη κατάσταση $n(t) = k$ στη χρονική διάρκεια $\mathrm{T}_k$, προς τον συνολικό αριθμό αφίξεων σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης $\mathrm{T}$ μιας χρονικής εξέλιξης της διαδικασίας:

$$P_n = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathrm{T}_k}{\mathrm{T}} = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\lambda \mathrm{T}_k}{\lambda \mathrm{T}} \approx \frac{\#\{\text{ΑΦΙΞΕΩΝ στη } n(t) = k \text{ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } \mathrm{T}_k\}}{\#\{\text{ΣΥΝΟΛΟΥ ΑΦΙΞΕΩΝ σε ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ } \mathrm{T}\}}$$

**Άρα μπορούμε να προσομοιώσουμε σύστημα Birth-Death με ομοιογενείς αφίξεις καταμετρώντας τις αφίξεις στις διάφορες καταστάσεις που μεταβαίνει**

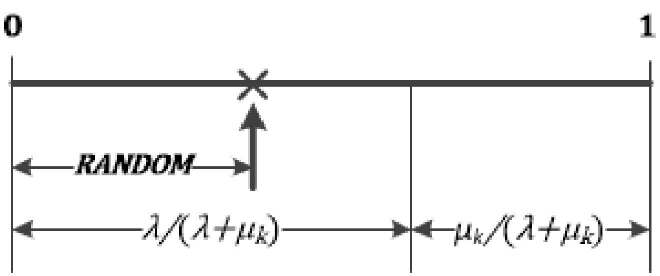
- Η εξέλιξη της κατάστασης (πληθυσμού) του συστήματος προκύπτει από τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση $n(t) = k$ στις $(k+1)$, $(k-1)$ με το δεδομένο ότι μια από τις δύο μεταβάσεις θα συμβεί με απόλυτη βεβαιότητα:

$$\mathrm{P}[k \to (k+1)/\text{μετάβαση}] = \lambda/(\lambda + \mu_k),\ \ \mathrm{P}[k \to (k-1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda + \mu_k)$$

- Η προσομοίωση ενεργοποιεί τις μεταβάσεις με κλήση τυχαίου αριθμού $RANDOM(0,1)$ ομοιόμορφα κατανεμημένου μεταξύ $(0,1)$ :

$$0 \le RANDOM(0,1) \le \frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} \Rightarrow \text{ΑΦΙΞΗ}, n(t) \to k+1$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu_k} < RANDOM(0,1) \le 1 \Rightarrow \text{ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ}, n(t) \to k-1$$




- Αν το σύστημα έχει μηδενικό πληθυσμό $n(t) = 0$, η επόμενη μετάβαση είναι πάντα ΑΦΙΞΗ και $n(t) \to 1$

- Αν το σύστημα δεν επιδέχεται αύξηση πληθυσμού, η $n(t) = K$ είναι blocking state και δεν ενεργοποιείται μετάβαση κατάστασης, αλλά η διαδικασία τυχαίας δημιουργίας επόμενου γεγονότος (ΑΦΙΞΗ ή ΑΝΑΧΩΡΗΣΗ) καθώς και η μέτρηση αφίξεων συνεχίζονται κανονικά

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ BIRTH-DEATH ΟΜΟΙΟΓΕΝΩΝ ΑΦΙΞΕΩΝ (2/2)

## Στατιστική Σύγκλιση Προσομοίωσης

- Η σύγκλιση της προσομοίωσης ελέγχεται ως προς την ***στατιστική σύγκλιση*** μεγεθών ενδιαφέροντος, π.χ. εκτίμηση μέσου πληθυσμού $\mathrm{E}[n(t)] = \sum_{k=0}^{K} P_k$ που υπολογίζεται σε τακτά διαστήματα από την αρχή της προσομοίωσης π.χ. κάθε 1000 αφίξεις: (από 0 έως 1000 αφίξεις), (από 0 έως 2000 αφίξεις), (από 0 έως 3000 αφίξεις) κλπ.
- Λόγω ***εργοδικότητας*** δεν απαιτούνται επαναλήψεις: Η εκτέλεση του προγράμματος και οι μετρήσεις συνεχίζονται σε μία υλοποίηση που διακόπτεται προσωρινά π.χ. κάθε 1000 αφίξεις μέχρι την ικανοποίηση κριτηρίων σύγκλισης
- Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-1000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο ***μεταβατικό φαινόμενο*** προς την εργοδική κατάσταση
- **Εμπειρικός κανόνας**: Η ταχύτητα σύγκλησης είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον βαθμό χρησιμοποίησης του συστήματος
- **Γενική Παρατήρηση**: Η σύγκλιση μιας προσομοίωσης είναι σύνηθες να διερευνάται με μαθηματικά εργαλεία στατιστικής (π.χ. τεστ $\chi^2$) γιατί μπορεί να κρύβονται εξαρτήσεις (correlations) μεγεθών, περιοδικές συμπεριφορές που οδηγούν σε πρόωρους τερματισμούς κλπ. Μια πλήρης προσομοίωση περιλαμβάνει διαστήματα εμπιστοσύνης για τις εκτιμήσεις πιθανοτήτων και ροπών τυχαίων μεταβλητών (π.χ. μέσοι όροι, διασπορά)

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ Μ/Μ/1/10

http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/simulation/

**RANDOM:** Ομοιόμορφος τυχαίος αριθμός (0,1)
**THRESHOLD:** $\lambda/(\lambda+\mu)$

**ARRIVALS:** Συνολικός αριθμός αφίξεων

**ARRIVAL[STATE]:** Αριθμός αφίξεων στην κατάσταση STATE = 0, 1, … ,10

**COUNT:** Αριθμός μεταβάσεων COUNT = 0, 1, … , MAXIMUM

**STATE:** Κατάσταση ουράς (πληθυσμός συστήματος M/M/1/10) , STATE = 0, 1, … , 10

**P[STATE]:** Εργοδική πιθανότητα STATE = 0, 1, … , 10

**AVERAGE:** Μέσος πληθυσμός συστήματος M/M/1/10

```
INITIALIZE: COUNT = 0, STATE = 0, ARRIVALS = 0, ARRIVAL[0…10] = 0, P[0…10] = 0
ARRIVAL:    ARRIVALS = ARRIVALS + 1
            ARRIVAL[STATE] = ARRIVAL[STATE] + 1
            COUNT = COUNT +1
            IF STATE = 10 : GO TO LOOP
            ELSE : STATE = STATE + 1
                          GO TO LOOP
LOOP :      IF STATE = 0 : GO TO ARRIVAL
            ELSE :
                 IF RANDOM < THRESHOLD : GO TO ARRIVAL
                 ELSE : GO TO DEPARTURE
DEPARTURE  :  COUNT  = COUNT +1 ; STATE = STATE - 1
                 IF COUNT < MAXIMUM : GO TO LOOP
                 ELSE : P[STATE=1…10] = ARRIVAL[STATE= 1…10] / ARRIVALS
                        AVERAGE = SUM { STATE ^ P[STATE] }, STATE = [1…10]
```