ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems

Συστήματα Γεννήσεων – Θανάτων (ΙΙ)

1. Σφαιρικές & Τοπικές Εξισώσεις Ισορροπίας
2. Ουρές Markov M/M/1, M/M/1/N

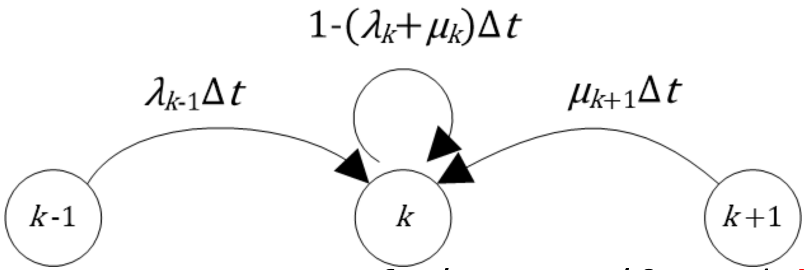
Βασίλης Μάγκλαρης

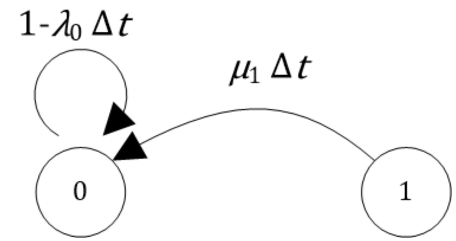
maglaris@netmode.ntua.gr

21/3/2018

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ MARKOV - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (1/3)

- Birth-Death Process: Διάγραμμα ***Πιθανοτήτων Μεταβάσεων*** σε χρόνο $\Delta t \rightarrow 0$ προς $n(t) = k$



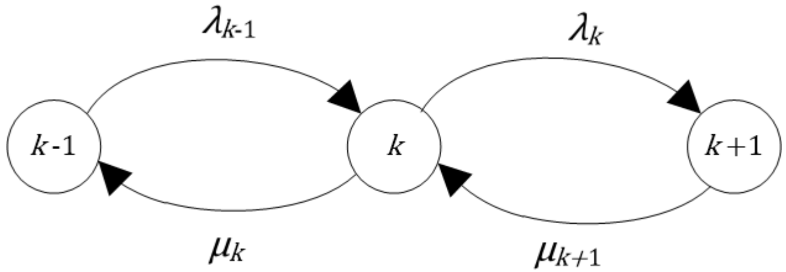


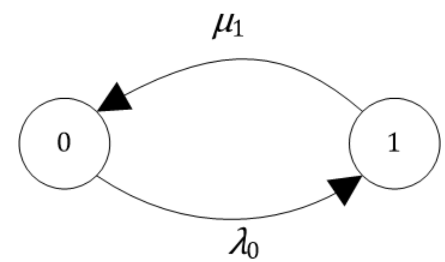
Εξισώσεις Μετάβασης (***Chapman - Kolmogorov***):

$$\mathrm{P}_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t \mathrm{P}_{k-1}(t-\Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t \mathrm{P}_{k+1}(t-\Delta t) + [1-(\lambda_k+\mu_k)\Delta \mathrm{t}]\mathrm{P}_k(\mathrm{t}-\Delta \mathrm{t}), \qquad k \geq 1$$

$$\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t) \;=\; \mu_1\,\Delta t\;\mathrm{P}_1(t-\Delta t) \;+\; (1-\;\lambda_0\Delta t)\;\mathrm{P}_{\mathbf{0}}(t-\Delta t)$$

- Birth-Death Process: Διάγραμμα ***Ρυθμών Μεταβάσεων*** μεταξύ ***Εργοδικών*** Καταστάσεων





Εξισώσεις Ισορροπίας:

$(\lambda_k+\mu_k)P_k = \;\lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}$ για $k \geq 1$ και $\lambda_0 P_0 \;=\; \mu_1 P_1$

Σχετικές Πιθανότητες Μεταβάσεων $k \rightarrow (k+1), k \rightarrow (k-1)$:

$\mathrm{P}[k \rightarrow (k+1)/\text{μετάβαση}] = \lambda_k/(\lambda_k+\mu_k)$, $\;\mathrm{P}[k \rightarrow (k-1)/\text{μετάβαση}] = \mu_k/(\lambda_k+\mu_k)$

Dwell Time - Χρόνος Παραμονής στην $n(t) = k$ μέχρι την επόμενη μετάβαση

Εκθετική τυχαία μεταβλητή d_k **με μέσο** $1/(\lambda_k+\mu_k)$: Η μικρότερη δύο ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών μέχρι *(1)* την επόμενη άφιξη με μέσο $1/\lambda_k$ ή *(2)* την ολοκλήρωση εξυπηρέτησης με μέσο $1/\mu_k$

$$d_k = \min(x,y)\,, F_{d_k}(\tau) = \mathrm{P}\{d_k \leq \tau\} = 1 - \mathrm{P}\{d_k > \tau\} = 1 - e^{-(\lambda_k+\mu_k)\tau} \;\; \text{διότι}$$

$$\mathrm{P}\{d_k > \tau\} = \mathrm{P}\{x > \tau, y > \tau\} = \mathrm{P}\{x > \tau\}\mathrm{P}\{y > \tau\} = e^{-\lambda_k \tau}e^{-\mu_k \tau} = e^{-(\lambda_k+\mu_k)\tau}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ MARKOV - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (2/3)

- Απείρως επισκέψιμες καταστάσεις $\boldsymbol{s} = n(t)$ ***positive recurrent states***: Με μη μηδενικές εργοδικές πιθανότητες $\mathrm{P}\{n(t) = k\} = \mathrm{P}_k(t) \rightarrow P_k > 0,\ \ k = 0,1,2, \ldots$

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων από και προς την κατάσταση $\boldsymbol{s}$:

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ } \boldsymbol{s}\} \ = \ \#\{\text{ΕΚΤΟΣ ΤΗΣ } \boldsymbol{s}\}$$

Σφαιρική Ισορροπία, ***Global Balance Equations***

- Σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T ισορροπούν οι αριθμοί μεταβάσεων μεταξύ δύο (όχι αναγκαστικά γειτονικών) καταστάσεων $\boldsymbol{s}_1$ και $\boldsymbol{s}_2$:

$$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2\} \ = \ \#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1\}$$

Τοπική Ισορροπία, Local Balance Equations

- Λόγω ***εργοδικότητας*** σε μεγάλο χρονικό διάστημα παρατήρησης T, με T_1 και T_2 τους συνολικούς χρόνους παραμονής στις $\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2$:

(1) $$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2\} = \mathrm{T}_1 \times r_{1,2}$$

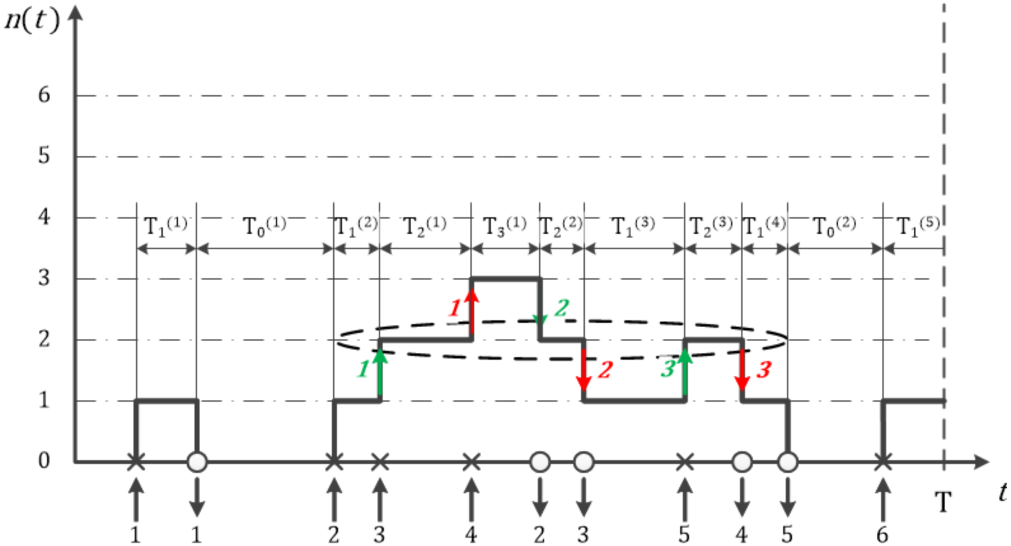
(2) $$\#\{\text{ΜΕΤΑΒΑΣΕΩΝ } \boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1\} = \mathrm{T}_2 \times r_{2,1}$$

Όπου $r_{1,2}$ και $r_{2,1}$ οι μέσοι ρυθμοί μετάβασης από $\boldsymbol{s}_1 \rightarrow \boldsymbol{s}_2$ και $\boldsymbol{s}_2 \rightarrow \boldsymbol{s}_1$

- Λόγω ***ισορροπίας:*** (1) = (2) και $r_{1,2} \lim_{\mathrm{T}\rightarrow\infty} \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}} \ = r_{2,1} \lim_{\mathrm{T}\rightarrow\infty} \frac{\mathrm{T}_2}{\mathrm{T}}$ ή

$$r_{1,2} P_1 \ = r_{2,1} P_2$$ ***Local Balance Equations***

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ MARKOV - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (3/3)



Σχηματική Απεικόνιση

Εξισώσεις Ισορροπίας στην Εργοδική Κατάσταση

Χρόνος Παρατήρησης Δείγματος $n(t)$: T

Global Balance Equation

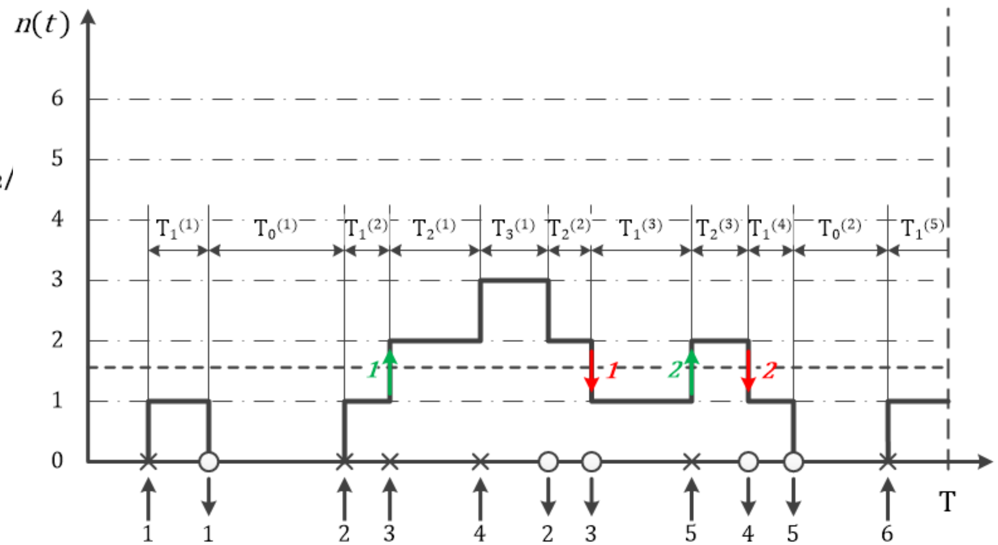
$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$

$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}$, $T_3 = T_3^{(1)}$

(State 2: Transitions In = Transitions Out)

$\lambda T_1 + \mu T_3 \sim \lambda T_2 + \mu T_2 \Rightarrow (\lambda T_1 + \mu T_3)/T \sim (\lambda + \mu)\ (T_2/$

$\Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2$



Local Balance Equation

$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(4)} + T_1^{(5)}$

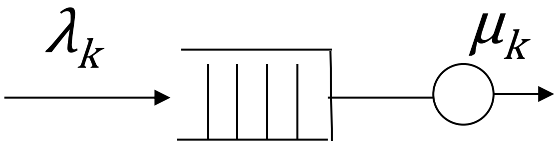
$T_2 = T_2^{(1)} + T_2^{(2)} + T_2^{(3)}$

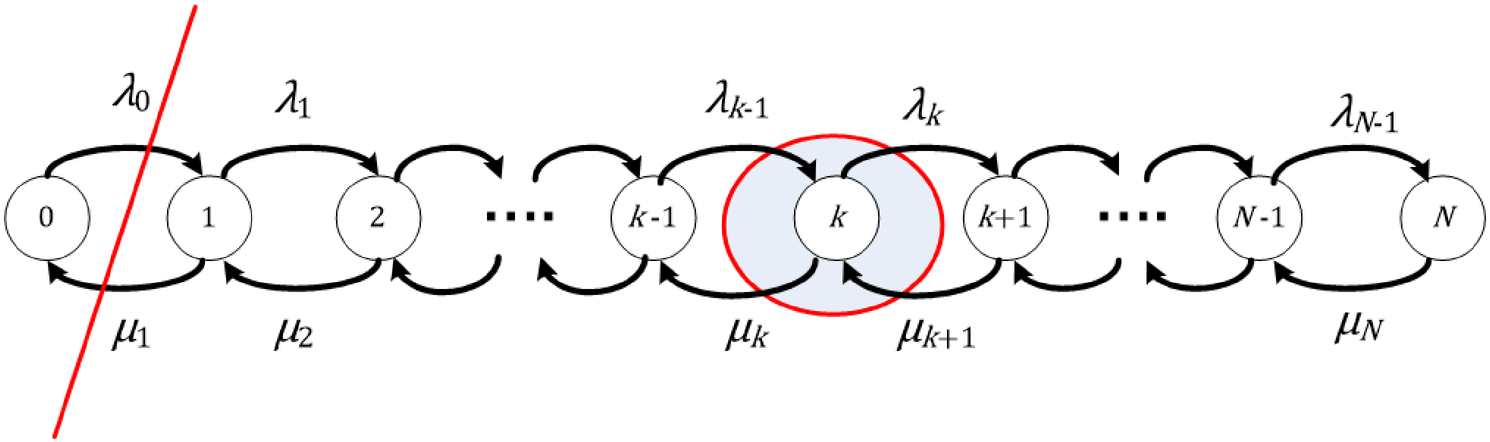
(Transitions 1->2 = Transitions 2->1)

$\lambda T_1 \sim \mu T_2 \Rightarrow \lambda (T_1/T) \sim \mu (T_2/T) \Rightarrow \lambda P_1 = \mu P_2$

ΟΥΡΑ M/M/1/N (1/2)

- Συστήματα M/M/1/*N* με ρυθμούς άφιξης και ρυθμούς εξυπηρέτησης εξαρτώμενους από τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (από την παρούσα κατάσταση του συστήματος)
(State Dependent M/M/1/N Queues)





Local Balance Equation

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$\lambda_{k-1} P_{k-1} = \mu_k P_k \qquad k = 1, 2, \ldots N$$

Global Balance Equation

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1$$

$$(\lambda_k + \mu_k) P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1} + \mu_{k+1} P_{k+1} \qquad k = 1, \ldots, N$$

Κανονικοποίηση Εργοδικών Πιθανοτήτων

$$P_0 + \cdots + P_N = 1$$

ΟΥΡΑ Μ/Μ/1/N (2/2)

- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί αφίξεων (γεννήσεων)

  $\lambda_k = \lambda$, Poisson, $k = 1,2,\dots,N$
- Σταθεροί μέσοι ρυθμοί εξυπηρέτησης (θανάτων)

  $\mu_k = \mu,\ k = 1,2,\dots,N$

  Εκθετικοί ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης $s, E(s) = 1/\mu$
- Εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

  $P_k = \rho^k P_0,\quad k = 0,1,2,\dots,N$

  $P_0 + P_1 + \cdots + P_{N-1} + P_N = 1$

  $\rho = \lambda/\mu$ Erlangs (η Μ/Μ/1/N είναι **πάντα ευσταθής** γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται)
- Αντικαθιστώντας με τον τύπο πεπερασμένου αθροίσματος γεωμετρικής προόδου:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \qquad \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N+1}, \qquad \rho = 1$$

- Χρησιμοποίηση Εξυπηρετητή (Server Utilization) $U = 1 - P_0$
- Ρυθμαπόδοση (throughput) $\gamma = \lambda(1 - P_N) = \mu(1 - P_0) = \mu U$
- Πιθανότητα απώλειας $P_{blocking} = P_N$

- Στάσιμος Εργοδικός μέσος όρος πληθυσμού – κατάστασης

$$\mathrm{E}[n(t)] \to \mathrm{E}(k) = \sum_{k=1}^{N} kP_k = \rho\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

- Νόμος του Little: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(k)/\gamma = \mathrm{E}(k)/[\lambda(1 - P_N)]$