

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

## Queuing Systems

### Συστήματα Γεννήσεων – Θανάτων (I)

1. Σφαιρικές & Τοπικές Εξισώσεις Ισορροπίας
2. Ουρές Markov  $M/M/1$ ,  $M/M/1/N$

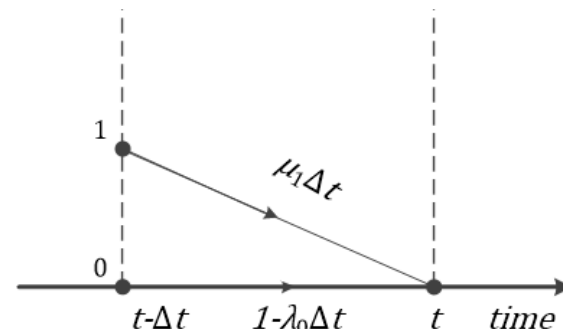
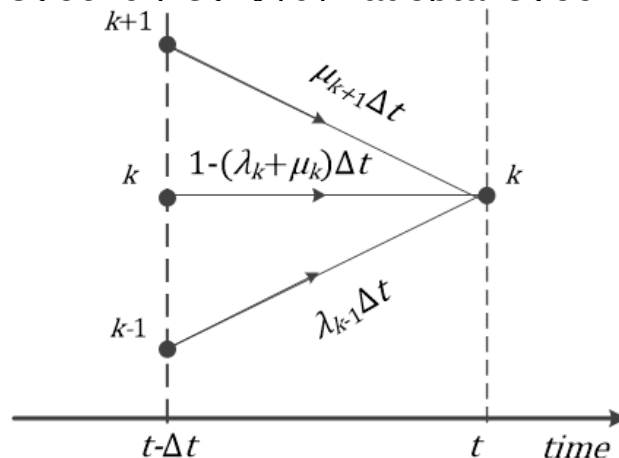
Βασίλης Μάγκλαρης

[maglaris@netmode.ntua.gr](mailto:maglaris@netmode.ntua.gr)

21/3/2018

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (1/4)

- Παραδοχές: **Birth – Death Processes (επανάληψη)**
  - Ανεξαρτησία γεννήσεων-θανάτων
  - Εξέλιξη της κατάστασης - πληθυσμού  $n(t)$  βασισμένη μόνο στο παρόν (Ιδιότητα Markov)
- Σύστημα Διαφορικών εξισώσεων Διαφορών
  - Κατάσταση ισορροπίας (**steady state**)
  - Την χρονική στιγμή  $t$  το σύστημα καταλήγει σε πληθυσμό  $n(t) = k$
  - Μπορεί να έχουν προηγηθεί οι ακόλουθες μεταβάσεις από την χρονική στιγμή  $t - \Delta t, \Delta t \rightarrow 0$  :
    - Μία άφιξη στο διάστημα  $\Delta t$ , με πιθανότητα  $\lambda_{k-1}\Delta t$  αν  $k > 0$
    - Μια αναχώρηση, με πιθανότητα  $\mu_{k+1}\Delta t$  αν υπάρχει η  $k + 1$  (σε περίπτωση περιορισμού μέγιστου πληθυσμού  $K$  μπορούμε να θεωρήσουμε  $\mu_{k+1} = 0$ )
    - Τίποτα από τα δύο, με πιθανότητα  $1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t$  αν  $k > 0$  ή  $1 - \lambda_0\Delta t$  αν  $k = 0$
- Οι εξισώσεις μετάβασης (**Chapman - Kolmogorov**) προκύπτουν από τον τύπο συνολικής πιθανότητας:
  - $P_k(t) = \lambda_{k-1}\Delta t P_{k-1}(t - \Delta t) + \mu_{k+1}\Delta t P_{k+1}(t - \Delta t) + [1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta t]P_k(t - \Delta t)$
  - $P_0(t) = \mu_1\Delta t P_1(t - \Delta t) + (1 - \lambda_0\Delta t)P_0(t - \Delta t)$
  - με αρχικές συνθήκες  $P_\nu(0)$  και οριακές συνθήκες  $\sum_k P_k(t) = 1, \forall t$



# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (2/4)

## Birth – Death Processes (επανάληψη)

Στο όριο,  $\Delta t \approx dt \rightarrow 0$ ,  $\frac{P_k(t) - P_k(t - \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{dP_k(t)}{dt}$  και προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων διαφορών:

- $\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t), \quad k > 0$
- $\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1P_1(t) - \lambda_0P_0(t)$
- με αρχικές συνθήκες  $P_k(0)$  και οριακές συνθήκες  $\sum_k P_k(t) = 1, \forall t$

Όταν  $t \rightarrow \infty$  και κάτω από ορισμένες συνθήκες το σύστημα συγκλίνει σε σταθερή κατάσταση. Το μεταβατικό φαινόμενο παύει να υπάρχει για καταστάσεις  $n(t) = k$  απείρως επισκέψιμες - **positive recurrent**, ξεχνιέται η αρχική συνθήκη  $P_k(0)$  και οι πιθανότητές  $P_k(t)$  συγκλίνουν στις οριακές πιθανότητες  $P_k > 0$ :

Για  $t \rightarrow \infty$ ,  $\frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0$  : **Εργοδικές Οριακές Πιθανότητες**

Σημείωση: Ισχύει η **εργοδική** ιδιότητα και οι οριακές πιθανότητες μπορούν να προσεγγισθούν σαν

$P_k = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{T_k}{T} \right\}$  όπου  $T_k$  είναι το σχετικό συνολικό χρονικό διάστημα  $T_k$  όταν  $n(t) = k$  σε μεγάλο χρονικό

ορίζοντα  $T$  **μιας** καταγραφής της εξέλιξης  $n(t)$  σε **ισορροπία**.

Οι εργοδικές οριακές πιθανότητες προκύπτουν από τις γραμμικά ανεξάρτητες **Εξισώσεις Ισορροπίας**:

- $(\lambda_k + \mu_k)P_k = \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \quad k > 1$
- $\lambda_0P_0 = \mu_1P_1$
- $P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (3/4)

## Birth – Death Processes (επανάληψη)

### Εφαρμογή σε Απλή Ουρά M/M/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό  $\lambda$  αφίξεις/sec:  $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή  $E(s) = \frac{1}{\mu}$  sec:  $\mu_k = \mu, k = 1, 2, 3, \dots$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Η εξέλιξη των πιθανοτήτων  $P[n(t) = k] = P_k(t)$  προκύπτει από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\text{➤ } \frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)P_k(t), \quad k > 0$$

$$\text{➤ } \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$\text{➤ } \text{με αρχικές συνθήκες } P_k(0) \text{ και οριακές συνθήκες } \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

- Στο όριο  $t \rightarrow \infty, \frac{dP_k(t)}{dt} = 0, P_k(t) \rightarrow P_k > 0$ , τις **εργοδικές πιθανότητες** που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και γενικά } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

$$\text{Εφόσον } 0 < \rho < 1 \text{ η άπειρη δυναμοσειρά } (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) \rightarrow \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow P_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \text{ και}$$

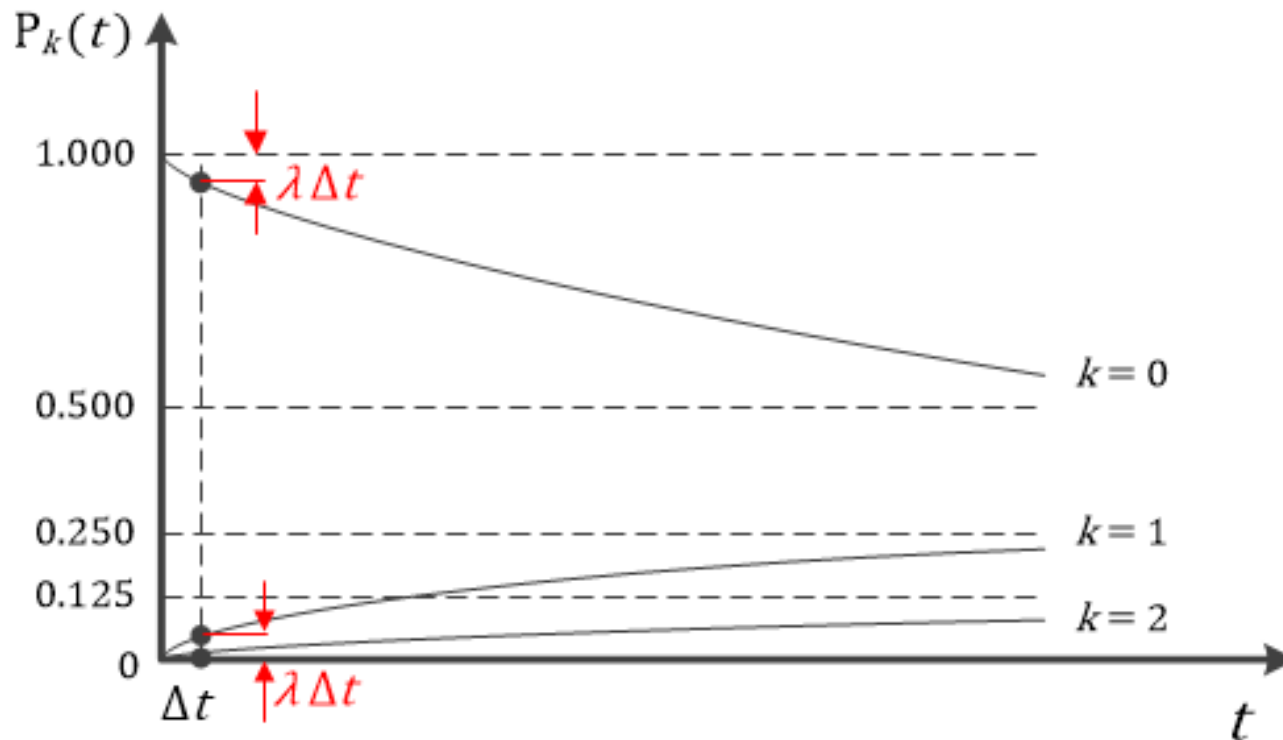
$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0$$

$$\text{Μέσο μήκος ουράς M/M/1 σε ισορροπία: } E[n(t)] \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1-\rho}$$

# ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΕΝΝΗΣΕΩΝ – ΘΑΝΑΤΩΝ (4/4)

## Birth – Death Processes (επανάληψη)

Χρονική Εξέλιξη Πιθανοτήτων Κατάστασης Απλής Ουράς Μ/Μ/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5 \text{ Erlangs}$$

Αρχικές Συνθήκες:  $P_0(0) = 1$ ,  $P_k(0) = 0$

Οριακές Εργοδικές Πιθανότητες:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t) = P_0 = 1 - \rho = 0.500$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_1(t) = P_1 = (1 - \rho)\rho = 0.250$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_2(t) = P_2 = (1 - \rho)\rho^2 = 0.125$$

# ΟΥΡΑ MARKOV Μ/Μ/1

- Αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό  $\lambda$  αφίξεις/sec:  $\lambda_k = \lambda = \gamma, \quad k = 0,1,2,3, \dots$
- Χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί με μέση τιμή  $E(s) = \frac{1}{\mu}$  sec:  $\mu_k = \mu, \quad k = 1,2,3, \dots$
- $\rho = u = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  Erlang (συνθήκη για οριακή ισορροπία – εργοδικότητα)
- Οι **εργοδικές πιθανότητες** προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\text{➤ } \lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$\text{➤ } (\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και } P_k = \rho^k P_0, \quad k > 0$$

$$\text{➤ } P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots)$$

Με  $0 < \rho < 1$  η άπειρη δυναμοσειρά συγκλίνει,  $P_0 \left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \Rightarrow$

$$P_0 = (1 - \rho), \quad P_k = (1 - \rho)\rho^k, \quad k > 0 \text{ και } P\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$$

- **Μέση κατάσταση συστήματος Μ/Μ/1 σε ισορροπία:**

$$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

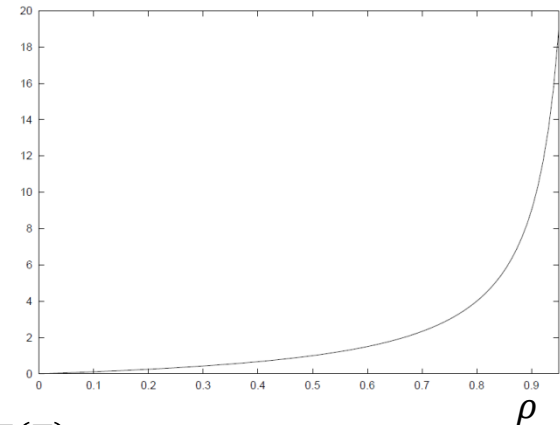
- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης:** Τύπος Little

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1 - \rho}$$

- **Μέσο μήκος ουράς & μέσος χρόνος αναμονής Μ/Μ/1:**

$$E[n_q(t)] = E[n(t)] - \rho, \quad E(W) = E(T) - 1/\mu$$

$E[n(t)]$



$E(T)$

