ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems
Επισκόπηση Γνώσεων Πιθανοτήτων

Βασίλης Μάγκλαρης

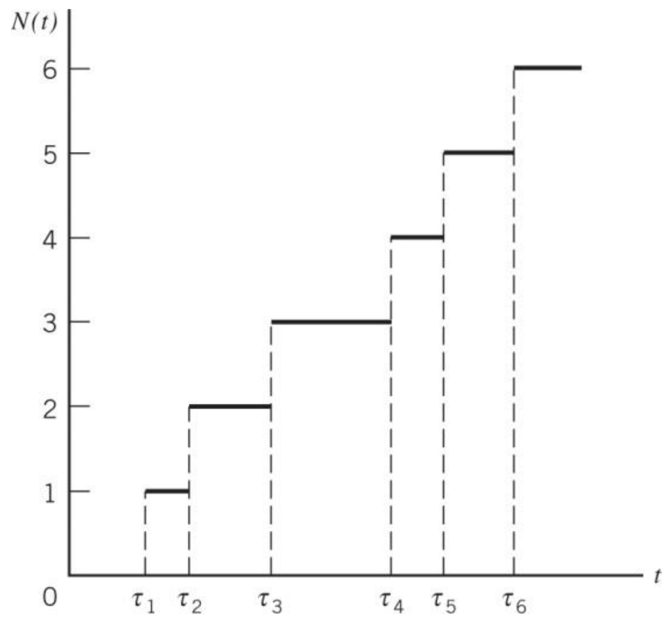
maglaris@netmode.ntua.gr

7/3/2018

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια Στοχαστική Ανέλιξη Καταμέτρησης *(Counting Process)* $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t+T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης *(τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον)*, η ν ακολουθεί την **κατανομή *Poisson* με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος** T: $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό *(rate)* εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (1/3)

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$ απαρίθμησης γεγονότων σε χρονικό διάστημα παρατήρησης T που εμφανίζονται **τυχαία** και **ανεξάρτητα** από παρελθούσες ή μελλοντικές εμφανίσεις γεγονότων στο δείγμα (υλοποίηση) της Στοχαστικής Ανέλιξης μετρητή $N(t)$ στο οποίο συνεισφέρουν (**ιδιότητα έλλειψης μνήμης *Markov***)

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα T είναι $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$

Εφαρμογές σε ανεξάρτητες εμφανίσεις τυχαίων γεγονότων:

- Τυχαίες εκρήξεις που προκαλούν τον **ΘΟΡΥΒΟ ΒΟΛΗΣ** σε ηλεκτρονικές συσκευές επικοινωνών
- Ανεξάρτητες τυχαίες **αφίξεις πελατών** σε **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ** με απαιτήσεις εξυπηρέτησης όπως:
  - Διεκπεραίωση Τηλεφωνικών Κλήσεων
  - Διακίνηση Πακέτων Δεδομένων στο Internet
  - Κυκλοφορία Αυτοκίνητων σε Οδικά Συστήματα
  - Αγορές και Πληρωμές σε Καταστήματα
  - Επεξεργασία Δεδομένων σε Κοινές Υπολογιστικές Υποδομές

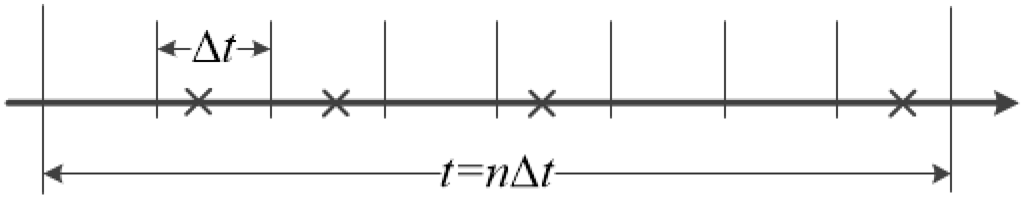
H KATANOMH POISSON (2/3)

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (*σημείων*) ***Poisson*** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή *(Discrete Random Variable)* $\{\nu = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$\mathrm{P}_t[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernouilli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (***επιτυχία***) με πιθανότητα $p = \lambda \Delta t$, μη εμφάνιση (***αποτυχία***) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

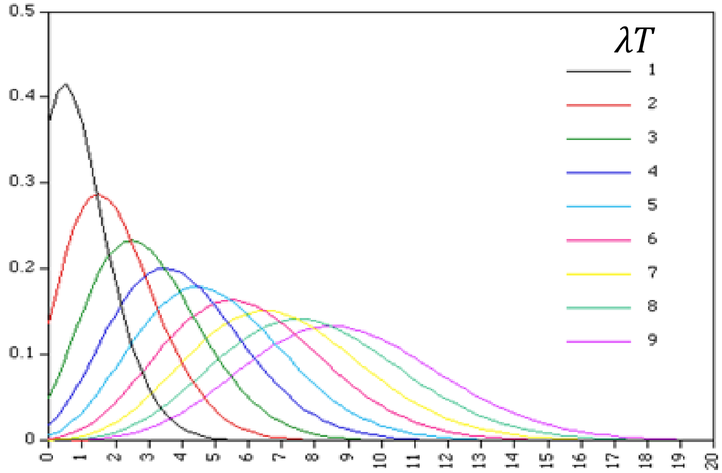
- Στο όριο $\Delta t \to 0,\ n \to \infty, t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \quad \to \quad \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (3/3)

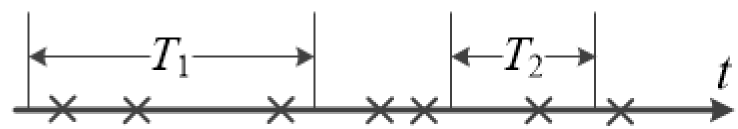
Κατανομή Poisson για Διαφορετικές Τιμές του $\lambda T = \mathrm{E}[N(T)]$

(μέσος αριθμός εμφανίσεων γεγονότων σε διάστημα T)



Οι συνεχείς καμπύλες στο σχήμα είναι οι περιβάλλουσες των Συναρτήσεων Μάζας Πιθανότητας (Ιστογράμματος) της Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής Poisson

$$\mathrm{P}_T[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

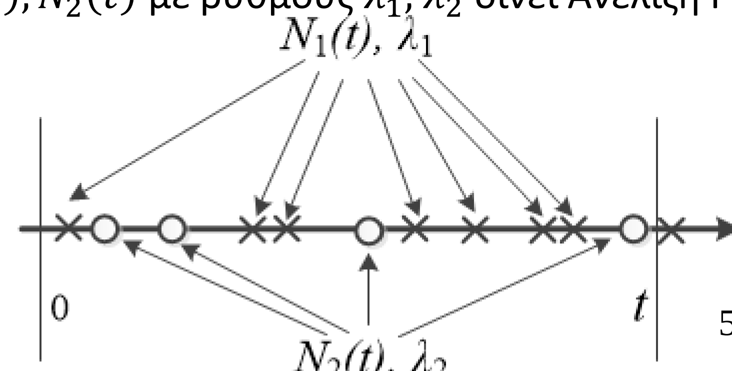


Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης Poisson

- **Μέση Τιμή & Διασπορά**: $\mathrm{E}[N(t)] = \sigma_{N(t)}^2 = \lambda t$

  Απόδειξη: $\mathrm{E}[N(t)] = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[N_i(t)] = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda \Delta t = \lambda t, \sigma_{N(t)}^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{N_i(t)}^2 = \lambda t$
- Ο συνολικός αριθμός σημείων Στοχαστική Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ σε μη **υπερ-καλυπτόμενα** χρονικά διαστήματα T_1, T_2 είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_1 + T_2)$
- **Υπέρθεση** δυο **ανεξαρτήτων** Ανελίξεων Poisson $N_1(t), N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 δίνει Ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- **Διάσπαση** Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ μέσω ανεξαρτήτων τυχαίων επαναλήψεων **Bernoulli** με πιθανότητες $p, q = 1 - p$

  Παράδειγμα: Τυχαία δρομολόγηση χωρίς μνήμη δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίξεις (διαδικασίες) Poisson με μέσους ρυθμούς $\lambda_1 = p\lambda, \lambda_2 = q$



Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (1/2)

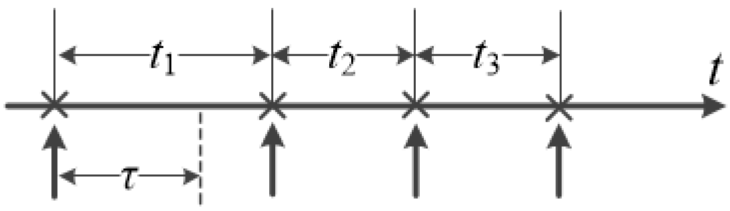
Ορισμοί, Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής - Cumulative Distribution Function (CDF) & Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας - Probability Density Function (PDF)

Το χρονικό διάστημα τ μεταξύ διαδοχικών εμφανίσεων σημείων Poisson είναι Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή (*Continuous Random Variable*) με ***Εκθετική Κατανομή*** (*Exponential Distribution*):

CDF: $F_\tau(t) = \mathrm{P}[\tau \le t] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ και **PDF**: $f_\tau(t) = \dfrac{dF_\tau(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

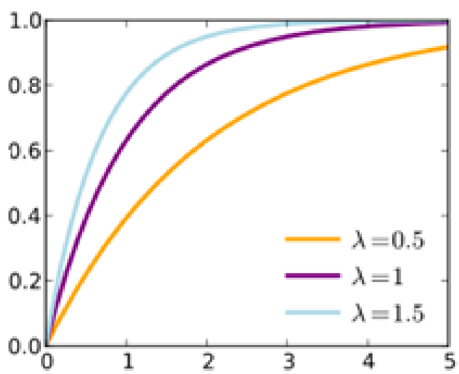
Απόδειξη

$$1 - F_\tau(t_1) = 1 - \mathrm{P}[\tau \le t_1] = \mathrm{P}[\tau > t_1] = \mathrm{P}_{t_1}[\nu = 0] = \frac{(\lambda t_1)^0}{0!} e^{-\lambda t_1} = e^{-\lambda t_1}$$

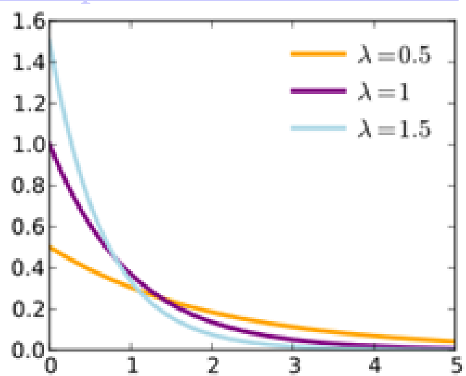


Random Poisson Points

https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution



CDF: $F_\tau(t) = \mathbf{P}[\tau \le t]$



PDF: $f(t) = \dfrac{dF_\tau(t)}{dt}$

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ (2/2)

Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

- $\mathrm{E}[\tau] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$
- $\mathrm{E}[\tau^2] = \int_{t=0}^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt = 2/\lambda^2, \;\; \sigma_\tau^2 = \mathrm{E}[\tau^2] - (\mathrm{E}[\tau])^2 = 1/\lambda^2$
- Ιδιότητα έλλειψης μνήμης:

$$\mathrm{P}[\tau > t + s \,|\tau > s] = \frac{\mathrm{P}[\tau > t + s, \;\; \tau > s]}{\mathrm{P}[\tau > s]} = \frac{\mathrm{P}[\tau > t + s]}{\mathrm{P}[\tau > s]} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}[\tau > t]$$
$$= 1 - F_\tau(t)$$

Η εκθετική κατανομή είναι η **μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής** με την ιδιότητα αυτή *(Memoryless, Markov Property)*. Την ίδια ιδιότητα έχει η *διακριτή γεωμετρική κατανομή της οποίας το όριο σε συνεχές πεδίο ορισμού είναι η εκθετική κατανομή*