

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

Queuing Systems

Ανάλυση Ουράς Αναμονής M/G/1

Αρχές Ανάλυσης Ουράς M/G/1

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov (Embedded Markov Chain)

Τύποι Pollaczek - Khinchin (P-K) για Ουρές M/G/1

Μέσες Τιμές Επίδοσης M/G/1

Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr

14/6/2017

ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (1/2) (επανάληψη)

ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Μ/Γ/Ν/Κ: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

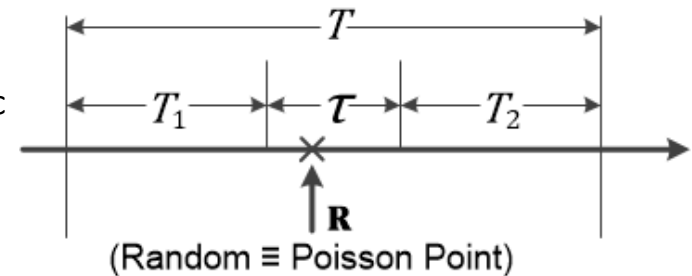
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec

Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson R στο T με πιθανότητα $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

NΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (2/2) (επανάληψη)

ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Μ/Γ/Ν/Κ: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος A σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής $n=k$:

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

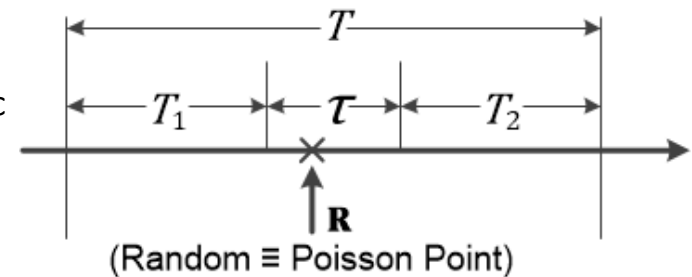
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής Y σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής $X=x$:

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα T διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα T_1, τ, T_2 και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό λ αφίξεις/sec

Η πιθανότητα k αφίξεων σε διάστημα t είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson R στο T με πιθανότητα $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$. Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα τ με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

Οι αφίξεις Poisson έχουν τη συμπεριφορά τυχαίων αφίξεων (**Poisson Arrivals ~ Random Arrivals**)

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages): Η εργοδική κατανομή (και ο μέσος όρος) της κατάστασης S ουράς **M/G/N/K** (εφόσον υπάρχει) εκτιμάται σαν ο μακροχρόνιος λόγος του συνολικού χρόνου τ_S που η κατάσταση έχει την συγκεκριμένη τιμή S προς το συνολικό διάστημα παρατήρησης T . **Οι εκτιμήσεις αυτές μπορεί να προκύψουν από καταγραφή της κατάστασης σε χρονικά σημεία αφίξεων Poisson με ενιαίο ρυθμό λ :**

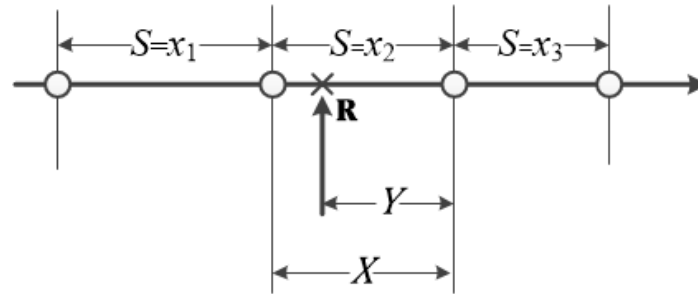
$$P\{n(t) = S\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_S}{T} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A_S}{A} \cong \frac{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson όταν } n(t) = S, \text{ στο συνολικό διάστημα } \tau_S}{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson στο συνολικό διάστημα } T}$$

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΣΗΣ (επανάληψη)

Renewal Theory: Basic Definitions

- Στατιστικά Μοντέλα Χρόνου Ζωής (**Life-Time**), Αποτυχίας (**Failure-Times**), Αποκατάστασης (**Repair-Times**)
- Βασική παραδοχή: Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών Σημείων Ανανέωσης (**renewals** που ορίζουν το Χρόνο Ζωής) είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές S με τιμές $x \geq 0$, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την ίδια κατανομή $F_S(x)$ (**i.i.d. - independent & identically distributed random variables**), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_S(x)$, μέση τιμή $E(S)$ και διασπορά $\sigma_S^2 = E(S^2) - [E(S)]^2$:

$$P\{S \in (x - dx, x)\} = f_S(x)dx, F_S(x) = P(S \leq x) = \int_{t=0}^x f_S(t)dt, E(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt, E(S^2) = \int_{t=0}^{\infty} t^2 f_S(t)dt$$



- Ένας άσχετος παρατηρητής του συστήματος σε τυχαίο χρονικό σημείο **R** (**Random Point** που σύμφωνα με την ιδιότητα **PASTA** ισοδυναμεί με τυχαία άφιξη **Poisson**) έχει πιθανότητα να βρεθεί σε διάστημα X με προτίμηση ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος x . Η απόσταση Y από το σημείο αυτό μέχρι το επόμενο renewal αποτελεί τον Υπολειπόμενο Χρόνο Ζωής (**Residual Life**)
- Renewal Paradox:** Η τυχαία μεταβλητή X (**το μέγεθος του διαστήματος τυχαίας επιλογής**) έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ διαφορετική από την $f_S(x)$

$$P\{R \in x | S=x\} = K \cdot x \quad (\text{τυχαία επιλογή ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος } x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{t=0}^x P\{R \in t | S=t\} f_S(t)dt = \int_{t=0}^x K \cdot t \cdot f_S(t)dt$$

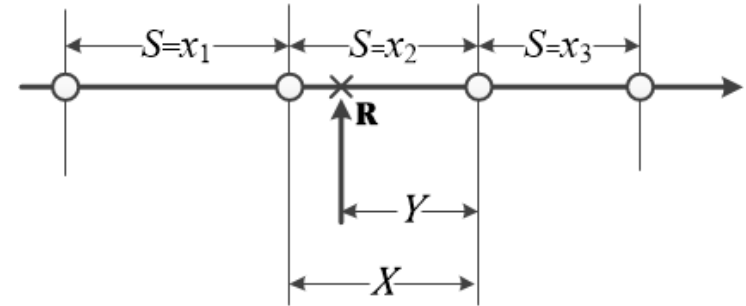
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = K \cdot x \cdot f_S(x), \quad \int_{x=0}^{\infty} f_X(x)dx = 1 = K \cdot \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x)dx \Rightarrow K = 1/E(S) \text{ και τελικά}$$

$$f_X(x) = x f_S(x)/E(S), \quad E(X) = E(S^2)/E(S)$$

ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ (επανάληψη)

Residual Life & Renewal Paradox

- Επιλογή διαστήματος $X = x$ από παρατηρητή που εμφανίζεται σε σημείο Poisson R : $f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{E(S)}$
- Ο Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής είναι τυχαία μεταβλητή Y με πυκνότητα πιθανότητας $f_Y(y)$
- $P\{Y \in (y - dy, y) | X=x\} = \frac{P\{R \in dy\}}{P\{R \in x\}} = \frac{K \cdot dy}{K \cdot x} = dy/x$
και από τον τύπο της συνολικής πιθανότητας



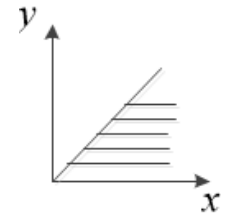
$$P\{Y \in (y - dy, y)\} = f_Y(y)dy = \int_{x=y}^{\infty} \frac{dy}{x} f_X(x)dx = \int_{x=y}^{\infty} \frac{f_S(x)}{E(S)} dy dx = \frac{dy}{E(S)} \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)}$$

- Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (**Mean Residual Life**):

$$E(Y) = \int_{y=0}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{y=0}^{\infty} y \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy = \frac{1}{E(S)} \int_{y=0}^{\infty} \left\{ y \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx \right\} dy$$

$$= \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \left\{ \int_{y=0}^x y dy \right\} dx = \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \frac{x^2}{2} dx = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)}$$



$$E(Y) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \geq \frac{E(S)}{2}$$

Renewal Paradox: Τυχαία ενδιάμεση παρατήρηση R «προτιμά» κατά μέσο όρο μεγάλα διαστήματα S

- Για **σταθερά** διαστήματα S : $E(S) = S = 1/\mu$, $\sigma_S^2 = 0$, $E(Y) = S/2 = 1/(2\mu)$ και η μέση τιμή του «προτιμώμενου» διαστήματος είναι $E(X) = E(S)$ (**αναμενόμενο**, χωρίς προκαταλήψεις λόγω απολύτως προβλέψιμου S)
- Για **εκθετικά** διαστήματα S : $E(S) = 1/\mu$, $\sigma_S^2 = 1/\mu^2$, $E(Y) = E(S) = 1/\mu$ (ιδιότητα **έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής**) και $E(X) = 2E(S) = 2/\mu$ (**διπλάσιο της μέσης τιμής** $E(S)$ με προκατάληψη λόγω απρόβλεπτου S)

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ & ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Moment Generating Functions - MGF (επανάληψη)

Διακριτές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές n με τιμές $k = 0, 1, 2, \dots$ και πιθανότητες $p_k = P(n = k)$

- Ορίζουμε την **Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (MGF)** σαν τον μετασχηματισμό z

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, |z| \leq 1,$$

- Για $|z|=1$, $G_n(1) = 1$ και οι παράγωγοί της MGF ως προς z δίνουν τις ροπές της n :

$$G_n(1)' = E(n), G_n(1)^{(m)} = E(n^m)$$

Παράδειγμα: Αφίξεις Poisson k με ρυθμό λ σε διάστημα t με πιθανότητες $P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$G_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$G_n(1) = 1, G_n(1)' = E(n) = \lambda t, G_n(1)'' = E(n^2) = \lambda t + (\lambda t)^2, \sigma_n^2 = E(n^2) - [E(n)]^2 = \lambda t$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X με τιμές $t \geq 0$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$

$$P\{X \in (t - \Delta t, t)\} = f_X(t)\Delta t, \quad F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{\tau=0}^t f_X(\tau) d\tau$$

- Ορίζουμε τον μετασχηματισμό **Laplace** $F_X(p)$ της $f_X(t)$

$$F_X(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f_X(t) dt$$

- Για $p = 0$ έχουμε αντίστοιχα $F_X(0) = 1$ και οι παράγωγοι ως προς p για $p = 0$ δίνουν τις ροπές της X :

$$F_X(0)' = -E(X), F_X(0)^{(m)} = (-1)^m E(X^m)$$

Παράδειγμα: Εκθετική μεταβλητή X με μέσο όρο $1/\mu$, $f_X(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$

$$F_X(p) = \mu / (\mu + p)$$

$$F_X(0) = 1, F_X(p)' = -\mu / (\mu + p)^2, E(X) = -F_X(0)' = 1/\mu, F_X(p)'' = 2\mu / (\mu + p)^3, E(X^2) = F_X(0)'' = 2/\mu^2$$

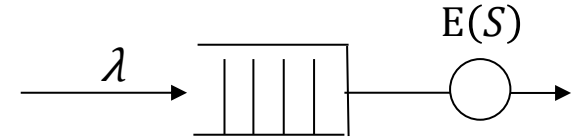
Παράδειγμα: X με σταθερή τιμή $1/\mu$, $f_X(t) = \delta(t - 1/\mu)$

$$F_X(p) = e^{-p/\mu}, F_X(0) = 1, F_X(p)' = -(1/\mu)e^{-p/\mu}, E(X) = -F_X(0)' = 1/\mu$$

$$F_X(p)'' = 1/\mu^2 e^{-p/\mu}, E(X^2) = F_X(0)'' = 1/\mu^2, \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0$$

- Άθροισμα ανεξαρτήτων** τυχαίων μεταβλητών $F_{X+Y}(p) = F_X(p) \cdot F_Y(p)$

ΑΡΧΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΟΥΡΑΣ Μ/Γ/1 ΣΕ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ



- Αφίξεις **Poisson**: λ πελάτες/sec
- Ένας Εξυπηρετητής με χρόνους εξυπηρέτησης: S **i.i.d** με πυκνότητα πιθανότητας $f_S(t), t \geq 0$
 - $P\{S \in (t - \Delta t, t)\} = f_S(t)\Delta t, F_S(t) = P(S \leq t) = \int_{\tau=0}^t f_S(\tau)d\tau$
 - $E(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt, E(S^m) = \int_{t=0}^{\infty} t^m f_S(t)dt, \sigma_S^2 = E(S^2) - [E(S)]^2$
 - Άπειρο μήκος ουράς
 - Για ισορροπία πρέπει το σύστημα να αδειάζει άπειρες φορές, ή σε χρονικό ορίζοντα $T \rightarrow \infty$ να υπάρχουν αφίξεις Poisson σε χρονικά διαστήματα συνολικής διάρκειας $T_0 > 0$ που να το βρίσκουν άδειο: Αν ορίσουμε την **εργοδική πιθανότητα** $P_0 \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_0}{T}$, πρέπει $P_0 = 1 - \lambda \cdot E(S) > 0$ (**PASTA**) ή $\rho \triangleq \lambda \cdot E(S) < 1$ Erlangs
- Η κατάσταση της ουράς σε τυχαία χρονική στιγμή παρατήρησης ή αφίξεως Poisson (από ιδιότητα **PASTA**) δίνεται πλήρως από το ζεύγος (i, r) όπου:
 - i : Αριθμός πελατών στο σύστημα
 - r : Υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη στον εξυπηρετητή κατά τη τυχαία παρατήρηση, αν υπάρχει πελάτης στον εξυπηρετητή με πιθανότητα $1 - P_0 = \rho = \lambda \cdot E(S) < 1$
- Για τον υπολογισμό **εργοδικών πιθανοτήτων** του αριθμού πελατών $P_i \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T}$ απαιτείται υπολογισμός των χρονοσταθερών στάσιμων (**stationary**) πιθανοτήτων των καταστάσεων $P(i, r)$ σε τυχαία σημεία παρατήρησης (ή αφίξεων Poisson) και ολοκλήρωσή τους ως προς την συνθήκη r
- Απλούστερος τρόπος: Υπολογισμός των στάσιμων (**stationary**) πιθανοτήτων $\pi(i)$ σαν όριο της σχετικής συχνότητας παρουσίας i πελατών σε **Ενσωματωμένα Σημεία (Embedded Points)** στο χρόνο που ορίζεται **αμέσως μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη**, οπότε με βεβαιότητα $r = 0$
- Η σχετική συχνότητα πελατών $P(i)$ μετά από κάθε αναχώρηση πελάτη ισούται με την σχετική συχνότητα πελατών που βλέπουν νέες αφίξεις Poisson στο σύστημα Μ/Γ/1 και λόγω **PASTA** δίνει τις **εργοδικές πιθανότητες**

$$P_i \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T} = \pi(i) \text{ και } P_0 = \pi(0) = 1 - \rho = 1 - \lambda \cdot E(S)$$

ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ MARKOV ΓΙΑ ΟΥΡΑ M/G/1 (1/2)

Embedded Markov Chain – M/G/1

Αλυσίδα Markov:

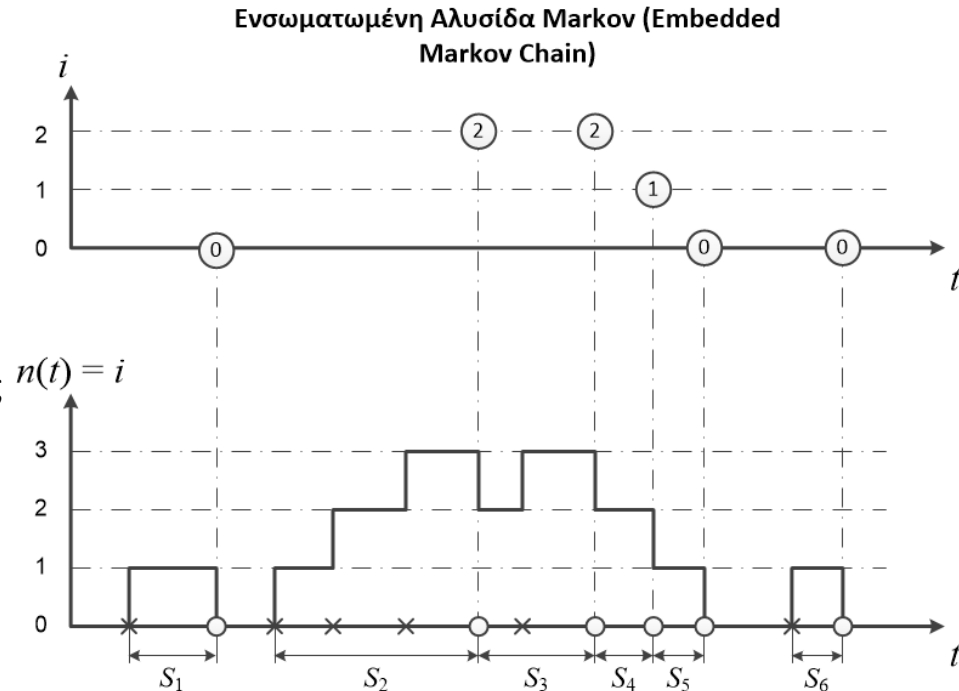
Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτής Κατάστασης i με μεταβάσεις σε Διακριτό Χρόνο $t = t_k$ ανεξάρτητες από το παρελθόν

- **Διακριτές Καταστάσεις** $i = 0, 1, 2, \dots$ με πιθανότητα εμφάνισης $\pi_k(i)$ ύστερα από k βήματα δυνατών εξελίξεων (διαδοχικές μεταβάσεις) $k = 0, 1, 2, \dots$
Θεωρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι ανά δύο προσβάσιμες μετά από διαδοχικές μεταβάσεις
- **Εξέλιξη Κατάστασης:** Διαδοχικές μεταβάσεις σε διακριτά χρονικά σημεία (βήματα $k = 0, 1, 2, \dots$) οδηγούν τη κατάσταση από $j \rightarrow i$ με πιθανότητες $P(i|j)$ ανεξάρτητες από την προϊστορία του συστήματος (οι μεταβάσεις στο κάθε βήμα δεν επηρεάζονται από το παρελθόν) $\Rightarrow$

$$\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi_k(j), \quad \sum_i \pi_k(i) = 1$$

- Στάσιμες (**stationary**) πιθανότητες, αν υπάρχει σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση (**steady-state**), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις απείρως επισκέψιμες (**recurrent**) καταστάσεις:

$$\pi(i) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(i) \text{ και } \pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi(j), \forall i$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1

ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗ ΑΛΥΣΙΔΑ MARKOV ΓΙΑ ΟΥΡΑ Μ/Γ/1 (2/2)

Embedded Markov Chain – M/G/1

Αλυσίδα Markov:

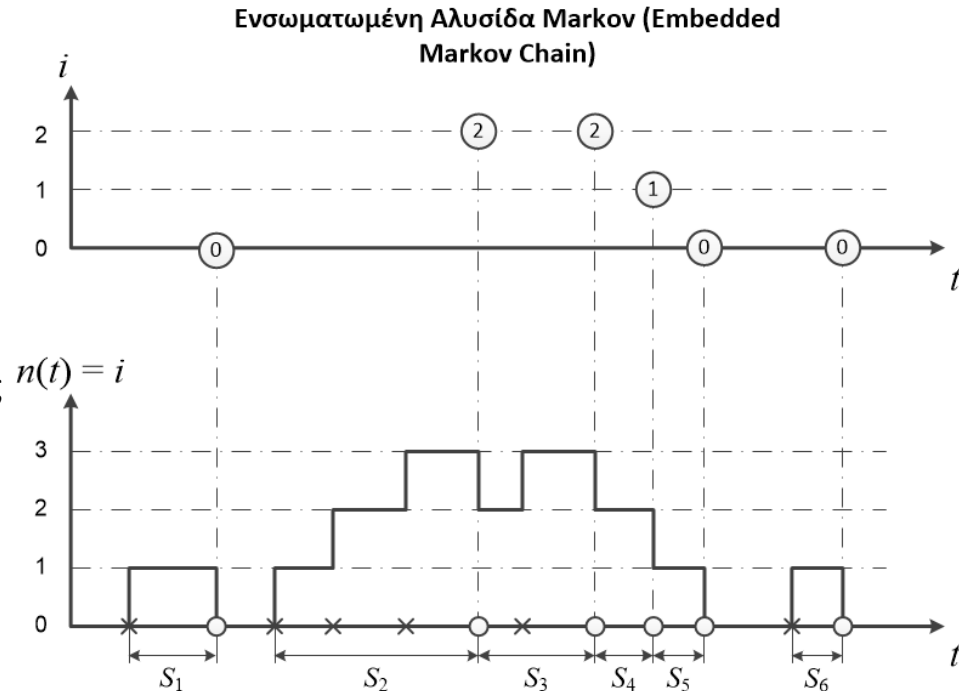
Στοχαστική Ανέλιξη Διακριτής Κατάστασης i με μεταβάσεις σε Διακριτό Χρόνο $t = t_k$ ανεξάρτητες από το παρελθόν

- **Διακριτές Καταστάσεις** $i = 0, 1, 2, \dots$ με πιθανότητα εμφάνισης $\pi_k(i)$ ύστερα από k βήματα δυνατών εξελίξεων (διαδοχικές μεταβάσεις) $k = 0, 1, 2, \dots$
Θεωρούμε πως όλες οι καταστάσεις είναι ανά δύο προσβάσιμες μετά από διαδοχικές μεταβάσεις
- **Εξέλιξη Κατάστασης:** Διαδοχικές μεταβάσεις σε διακριτά χρονικά σημεία (βήματα $k = 0, 1, 2, \dots$) οδηγούν τη κατάσταση από $j \rightarrow i$ με πιθανότητες $P(i|j)$ ανεξάρτητες από την προϊστορία του συστήματος (οι μεταβάσεις στο κάθε βήμα δεν επηρεάζονται από το παρελθόν) $\Rightarrow$

$$\pi_{k+1}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi_k(j), \quad \sum_i \pi_k(i) = 1$$

- Στάσιμες (**stationary**) πιθανότητες, αν υπάρχει σύγκλιση σε σταθερή κατάσταση (**steady-state**), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις απείρως επισκέψιμες (**recurrent**) καταστάσεις:

$$\pi(i) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k(i) \text{ και } \pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi(j), \forall i$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα Μ/Γ/1

Ενσωματωμένη Αλυσίδα Markov για Ανάλυση Εργοδικών Πιθανοτήτων Συστήματος Μ/Γ/1:

- Κατάσταση: Αριθμός πελατών (πληθυσμός) στο σύστημα i **αμέσως μετά από αναχώρηση πελάτη**
- Μεταβάσεις: Σε ενσωματωμένα χρονικά σημεία ορισμένα αμέσως μετά από αναχώρηση πελάτη
- Στάσιμες πιθανότητες $\pi(i)$ της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov: Ίσες λόγω **ισορροπίας** με τη σχετική συχνότητα πληθυσμού i **αμέσως πριν από άφιξη Poisson** και λόγω **PASTA** ίσες με τις εργοδικές πιθανότητες: $\pi(i) = P_i \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_i}{T}$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (1/3)

Υπολογισμός Διανύσματος Στάσιμων Πιθανοτήτων $\pi = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots]^T$

$P(i|j)$: Πιθανότητες Μετάβασης $j \rightarrow i$ σε ενσωματωμένα χρονικά σημεία ορισμένα αμέσως μετά από αναχώρηση

Εξισώσεις Ισορροπίας Μεταβάσεων στη Σταθερή Κατάσταση : $\pi(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P(i|j) \pi(j)$, $\sum_i \pi(i) = 1 \forall i$

Ορίζουμε $\alpha_k \triangleq P\{k \text{ αφίξεις Poisson στο διάστημα εξυπηρέτησης πελάτη } S = t\}$

$$= \int_{t=0}^{\infty} [e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!] f_S(t) dt \quad (\text{ιδιότητα } \textcolor{red}{\text{συνολικής πιθανότητας}})$$

- $\alpha_0 = P(0|0) = P(0|1) = P(1|2) = P(2|3) = P((i-1)|i), i \geq 3$
- $\alpha_1 = P(1|0) = P(1|1) = P(2|2) = P(3|3) = P(i|i), i \geq 3$
- $\alpha_2 = P(2|0) = P(2|1) = P(3|2) = P(4|3) = P((i+1)|i), i \geq 3$
- $\alpha_k = P(k|0) = P(k|1) = P((k+1)|2) = P((k+2)|3) = P((k+i-1)|i), i \geq 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(i|0) = P(i|1) = \alpha_i & \text{για κάθε } i \\ P(i|j) = \alpha_{i-j+1} & \text{για } j > 1, i \geq j-1 \\ P(i|j) = 0 & \text{για } i < j-1 \end{cases}$$

Παράδειγμα M/M/1:

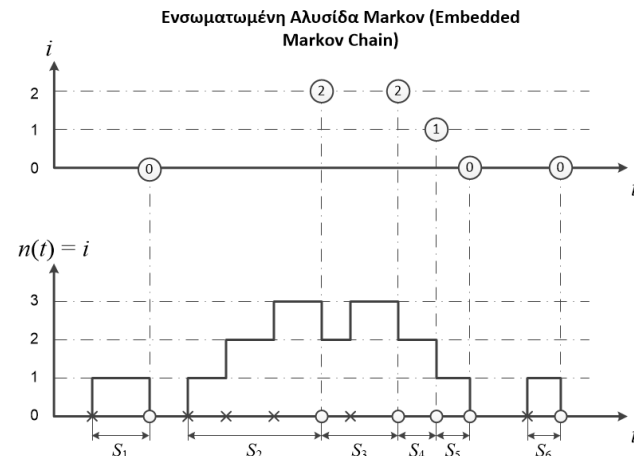
Αν η S έχει εκθετική κατανομή $f_S(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$$\alpha_0 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

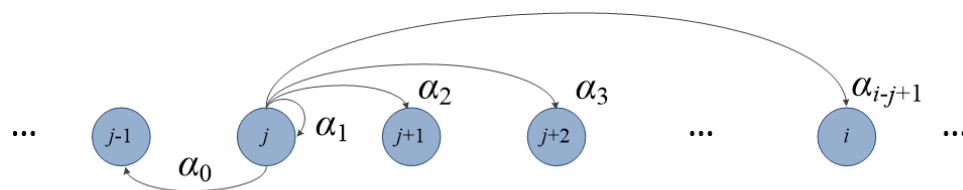
$$\alpha_1 = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t) \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu}$$

$$\alpha_2 = \int_{t=0}^{\infty} \{e^{-\lambda t} (\lambda t)^2 / 2\} \mu e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda^2 \mu}{\lambda + \mu}$$

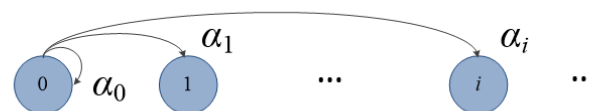
...



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1



Από Κατάσταση $j > 0$



Από Κατάσταση $j = 0$

**Ενδεικτικές Πιθανότητες Μετάβασης
Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (2/3)

Υπολογισμός Διανύσματος Στάσιμων Πιθανοτήτων $\pi = [\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots]^T$

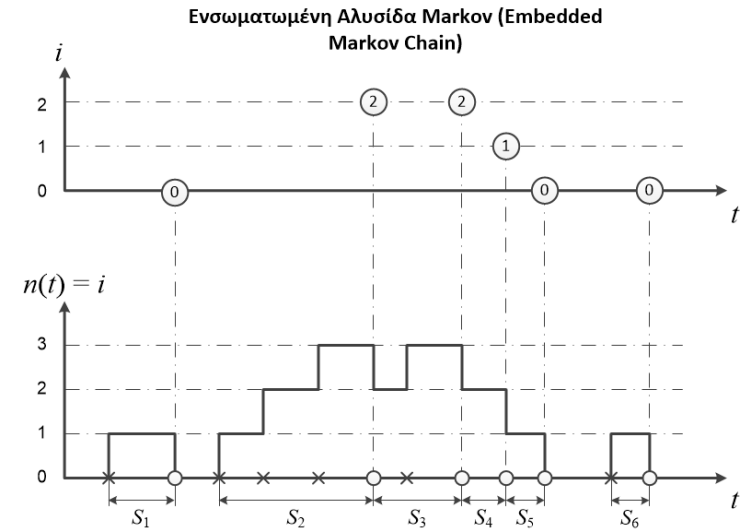
Εξισώσεις Ισορροπίας για τις στάσιμες πιθανότητες π της Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi(0) \\ \pi(1) \\ \pi(2) \\ \pi(3) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \pi$$

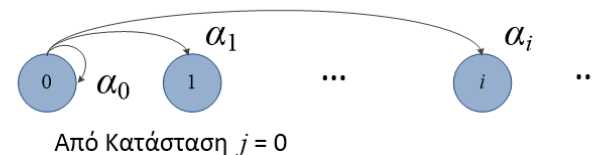
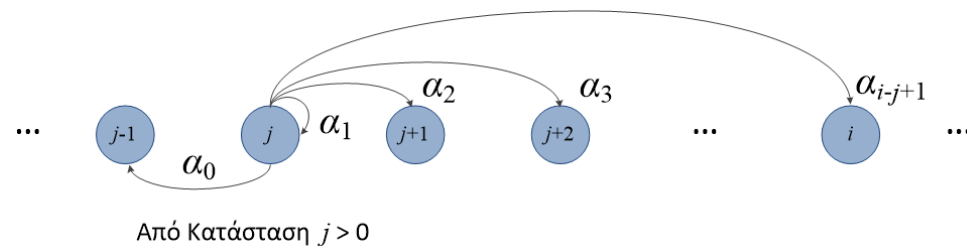
$$\pi(i) = \alpha_i \pi(0) + \alpha_i \pi(1) + \alpha_{i-1} \pi(2) + \dots + \alpha_2 \pi(i-1) + \alpha_1 \pi(i) + \alpha_0 \pi(i+1)$$

$$= \alpha_i \pi(0) + \sum_{j=0}^i \alpha_j \pi(i+1-j), \quad \forall i$$

$$\pi(0) + \pi(1) + \pi(2) + \dots = \sum_i \pi(i) = 1$$



Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα M/G/1



Ενδεικτικές Πιθανότητες Μετάβασης
Ενσωματωμένης Αλυσίδας Markov

ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ MARKOV (3/3)

Υπολογισμός Μετασχηματισμού z (**Moment Generating Function - MGF**) του Πληθυσμού i Συστήματος M/G/1

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i, |z| \leq 1$$

σαν συνάρτηση του Μετασχηματισμού z των α_i :

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, |z| \leq 1$$

$$\pi(i) = \alpha_i \pi(0) + \sum_{j=0}^i a_j \pi(i+1-j)$$

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \frac{1}{z} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^i a_j z^j \pi(i+1-j) z^{i+1-j} \right\} + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \pi(0) z^i = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} a_j z^j \pi(i+1-j) z^{i+1-j} \right\} + \pi(0) A(z) \\ &= \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \left\{ \sum_{i=j}^{\infty} \pi(i+1-j) z^{i+1-j} \right\} + \pi(0) A(z) = \frac{1}{z} A(z) [\Pi(z) - \pi(0)] + \pi(0) A(z) \end{aligned}$$

Από την ιδιότητα **PASTA** $\pi(0) = P_0 = 1 - \rho = 1 - \lambda \cdot E(S) \Rightarrow$

$$\Pi(z) = \frac{\pi(0) A(z) (1 - z^{-1})}{1 - z^{-1} A(z)} = \frac{(1 - \rho) A(z) (1 - z)}{A(z) - z}$$

- Υπολογισμός $A(z)$ μέσω **συνολικής πιθανότητας** αριθμού αφίξεων Poisson σε χρόνο εξυπηρέτησης S :

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{t=0}^{\infty} P(k|S=t) f_S(t) dt \right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} [e^{-\lambda t} (\lambda z t)^k / k!] f_S(t) dt = \int_{t=0}^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)t} f_S(t) dt = F_S(\lambda - \lambda z)$$

Τύπος **Pollaczek - Khinchin (P-K)** για την MGF Πληθυσμού i Εργοδικής Ουράς M/G/1

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \frac{(1 - \rho) F_S(\lambda - \lambda z) (1 - z)}{F_S(\lambda - \lambda z) - z}, \quad |z| \leq 1$$

Παράδειγμα M/M/1:

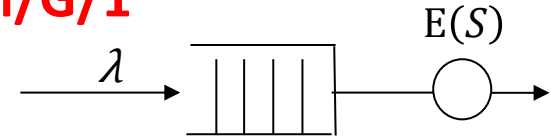
Αν η S έχει εκθετική κατανομή $f_S(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$

$A(z) = F_S(\lambda - \lambda z) = \mu / (\mu + \lambda - \lambda z)$, $\Pi(z) = (1 - \rho) / (1 - \rho z)$ και $\pi(i) = (1 - \rho) \rho^i, i = 0, 1, 2, \dots, |z| \leq 1$ και $\rho \leq 1$

ΧΡΟΝΟΙ ΠΑΡΑΜΟΝΗΣ & ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ – M/G/1

Sojourn & Waiting Times – M/G/1

T, W, S : Χρόνοι Παραμονής (**Sojourn Time**), Αναμονής (**Waiting Time**) και Εξυπηρέτησης (**Service Time**), $T = W + S$



Υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace $F_T(p)$ Χρόνου Παραμονής T Συστήματος M/G/1

- Ο **Χρόνος Παραμονής** πελάτη που εισέρχεται στη ουρά την χρονική στιγμή t ορίζεται σαν η συνολική παραμονή T μέχρι να εξυπηρετηθούν οι $n(t) = i$ πελάτες που βρίσκει μπροστά του (υποθέτουμε εξυπηρέτηση **FCFS/FIFO**). Οι εργοδικές πιθανότητες της $n(t)$ είναι ίσες με τις πιθανότητες $\pi(i)$ της ενσωματωμένης αλυσίδας Markov $\Rightarrow$ {Πληθυσμός στο σύστημα μετά την αναχώρηση Πελάτη} = {Αριθμός αφίξεων **Poisson** στη διάρκεια του $T = \tau$ }

$$\pi(i) = \int_{\tau=0}^{\infty} [e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^i / i!] f_T(\tau) d\tau$$

$$\Pi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(i) z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} P(i | T=\tau) f_T(\tau) d\tau \right] z^i = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} [e^{-\lambda\tau} (\lambda z\tau)^i / i!] f_T(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)\tau} f_T(\tau) d\tau = F_T(\lambda - \lambda z)$$

Με $p = \lambda - \lambda z$ προκύπτει ο επίσης ονομαζόμενος τύπος **Pollaczek – Khinchin (P-K)** για τον Χρόνο Παραμονής T :

Τύπος **Pollaczek – Khinchin (P-K)** για τον Μετασχηματισμό Laplace Χρόνου Παραμονής T Εργοδικής Ουράς M/G/1

$$F_T(p) = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-p\tau} f_T(\tau) d\tau = \frac{(1 - \rho) F_S(p) p}{\lambda F_S(p) + p - \lambda}$$

Παράδειγμα M/M/1: Εκθετική εξυπηρέτηση $E(S) = 1/\mu$, $F_S(p) = \frac{\mu}{\mu + p} \Rightarrow F_T(p) = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) + p}$ και

$$f_T(\tau) = \mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)\tau}, \tau \geq 0$$

Παράδειγμα M/D/1: Σταθερή εξυπηρέτηση $E(S) = S = 1/\mu$, $F_S(p) = e^{-p/\mu} \Rightarrow F_T(p) = \frac{(1-\rho)e^{-p/\mu} \cdot p}{\lambda e^{-p/\mu} + p - \lambda}$

- $T = W + S$ όπου W, S ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές άρα $F_T(p) = F_W(p) \cdot F_S(p) \Rightarrow$

$$F_W(p) = \frac{(1 - \rho)p}{\lambda F_S(p) + p - \lambda}$$

ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ ΕΠΙΔΟΣΗΣ Μ/Γ/1

- Από τύπους **P-K**:

$E[n(t)] = \Pi(1)'$ παραγωγή της $\Pi(z)$ με διπλή εφαρμογή του κανόνα L' Hospital και αναγωγή στη τιμή $z=1$

$E(T) = F_T(0)'$ παραγωγή της $F_T(p)$ με κανόνα L' Hospital και αναγωγή στη τιμή $p=0$

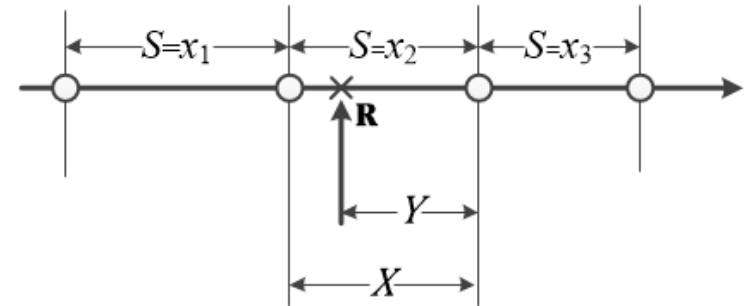
- Με άμεση εφαρμογή **Μέσων Τιμών, Θεωρίας Ανανέωσης** και του τύπου του **Little**:

➤ $E(T) = E[n(t)]/\lambda$, $E(W) = E[n_Q(t)]/\lambda$

➤ $E(W) = E(T) - E(S)$



$$E(T) = E(W) + E(S) = E(W) + 1/\mu$$



$n_Q(t)$: Αριθμός πελατών στην αναμονή, $E[n_Q(t)] = \lambda \cdot E(W)$

$E[n_Q(t)] \cdot E(S)$: Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης πελατών που προηγούνται στην αναμονή

$\rho = \lambda \cdot E(S)$: Πιθανότητα να υπάρχει πελάτης στην εξυπηρέτηση κατά την άφιξη Poisson (ιδιότητα **PASTA**)

$E(Y) = \frac{E(S^2)}{2E(S)}$: Μέσος υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη κατά τυχαία άφιξη (**Renewal Paradox**)

$$E(W) = E[n_Q(t)] \cdot E(S) + \rho \cdot E(Y) = E(W) \cdot \lambda \cdot E(S) + \rho \cdot E(Y) \Rightarrow E(W) = \frac{\rho E(Y)}{1-\rho} :$$

Τύπος **Pollaczek – Khinchin (P-K)** για Μέσο Εργοδικό Χρόνο

Αναμονής & Παραμονής σε Ουρά Μ/Γ/1

$$E(W) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}, \quad E(T) = E(W) + 1/\mu$$

Παράδειγμα Μ/Μ/1: $E(S) = 1/\mu$, $E(S^2) = 2/\mu^2 \Rightarrow E(W) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$, $E(T) = E(W) + 1/\mu = \frac{1/\mu}{(1-\rho)}$

Παράδειγμα Μ/Δ/1: $E(S) = S = 1/\mu$, $E(S^2) = 1/\mu^2 \Rightarrow E(W) = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$, $E(T) = E(W) + 1/\mu$