

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

## Queuing Systems

Επισκόπηση Αναλυτικών Τεχνικών Θεωρίας  
Πιθανοτήτων για Εφαρμογή σε Ουρές Αναμονής  
**M/G/1**

Απόδειξη Τύπου Little

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Βασικοί Ορισμοί Θεωρίας Ανανέωσης (Renewal Theory)

Υπολειπόμενη Ζωή (Residual Life, Renewal Paradox)

Ροπογεννήτριες Συναρτήσεις (Moment Generating Functions – MGM)

Βασίλης Μάγκλαρης  
[maglaris@netmode.ntua.gr](mailto:maglaris@netmode.ntua.gr)

7/6/2017

# ΤΥΠΟΣ Little

## Γενικό Σύστημα Αναμονής σε Εργοδική Ισορροπία

Σε χρονικό ορίζοντα  $t$ :

$A(t)$ : Συνολικός αριθμός αφίξεων στο διάστημα  $(0, t)$

$D(t)$ : Συνολικός αριθμός αναχωρήσεων στο διάστημα  $(0, t)$

$T_i$ : Χρόνος παραμονής στο σύστημα του πελάτη  $i, i = 1, \dots, D(t)$

Ο αριθμός πελατών στο σύστημα στο χρόνο  $t$  είναι:

$$n(t) = A(t) - D(t)$$

Ο συνολικός αριθμός πελατών στο σύστημα στο διάστημα  $(0, t)$  είναι:

$$\int_0^t n(\tau) d\tau \cong \sum_{i=1}^{D(t)} T_i$$

Σε χρονικό ορίζοντα  $T \rightarrow \infty$  η ρυθμαπόδοση  $\gamma$  και ο χρόνος καθυστέρησης  $E(T)$  στην εργοδική κατάσταση είναι:

$$\gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T)}{T}, \quad E(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{D(T)} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right]$$

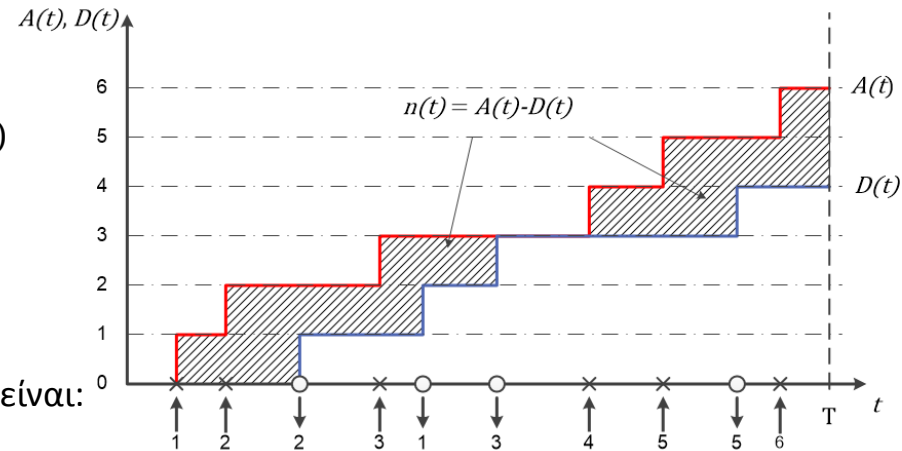
Λόγω εργοδικότητας:

$$E[n(t)] = E(n) =$$

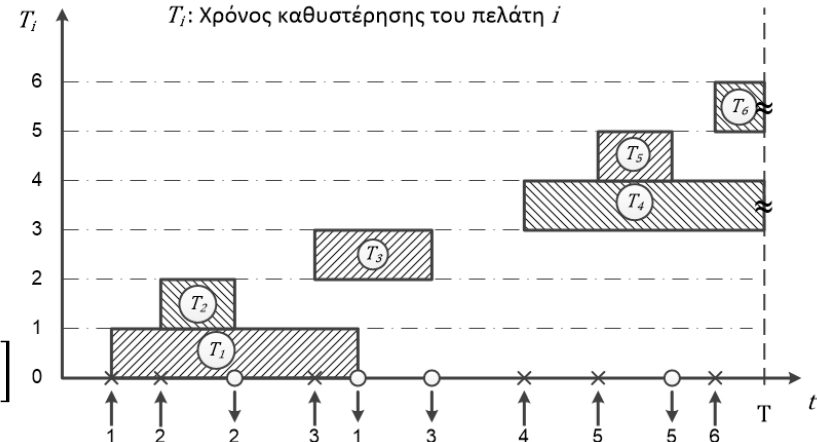
$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T n(\tau) d\tau \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{D(T)}{T} \times \frac{1}{D(T)} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right]$$

Και τελικά:

$$E(n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D(T)}{T} \times \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{D(T)} \sum_{i=1}^{D(T)} T_i \right] = \gamma E(T)$$

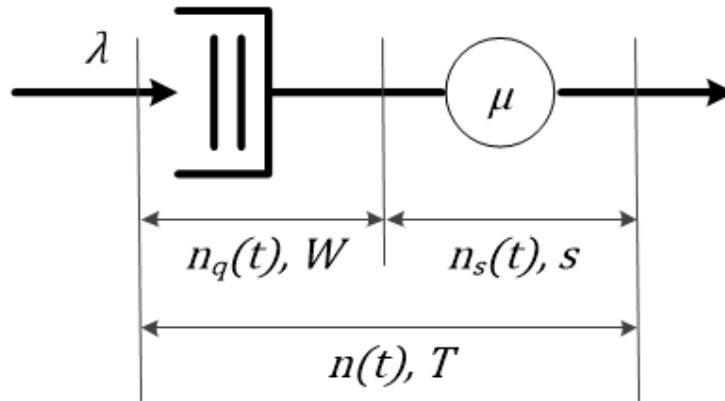


$A(t)$ : Αριθμός αφίξεων πελατών στο  $(0, t)$   
 $D(t)$ : Αριθμός αναχωρήσεων πελατών στο  $(0, t)$   
 $T_i$ : Χρόνος καθυστέρησης του πελάτη  $i$



# ΧΡΟΝΟΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ ΟΥΡΑΣ ΣΕ ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕ ΕΝΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΤΗ (**G/G/1**)

$$\gamma = \lambda (1 - P\{\text{blocking}\}) = \mu P\{n(t) > 0\} \leq \lambda, \gamma < \mu$$



$$n(t) = n_q(t) + n_s(t), \quad T = W + s$$

$$E(T) = \frac{E\{n(t)\}}{\gamma} = E(W) + E(s) = \frac{E\{n_q(t)\}}{\gamma} + \frac{E\{n_s(t)\}}{\gamma}$$

:

$$E\{n_s(t)\} = \gamma E(s) = \frac{\gamma}{\mu} = 0 \cdot P\{n(t) = 0\} + P\{n(t) > 0\} = P\{n(t) > 0\}$$

$$\Rightarrow \text{ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή } u = \frac{\gamma}{\mu} = P\{n(t) > 0\}$$

# ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (1/2)

## ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Μ/Γ/Ν/Κ: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος  $A$  σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής  $n=k$ :

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

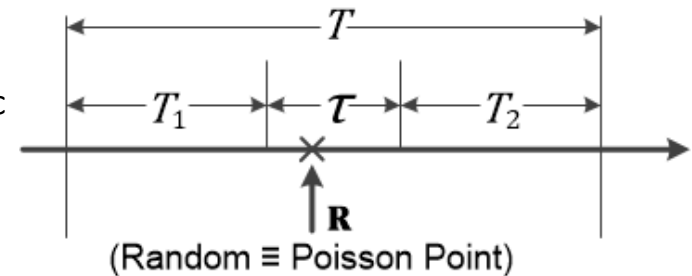
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής  $Y$  σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής  $X = x$ :

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα  $T$  διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα  $T_1, \tau, T_2$  και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό  $\lambda$  αφίξεις/sec

Η πιθανότητα  $k$  αφίξεων σε διάστημα  $t$  είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,3, \dots, \quad E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson  $R$  στο  $T$  με πιθανότητα  $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$ . Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα  $\tau$  με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

# ΝΟΜΟΙ ΣΥΝΟΛΙΚΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (2/2)

## ΕΡΓΟΔΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ M/G/N/K: ΙΔΙΟΤΗΤΑ PASTA

- Συνολική Πιθανότητα Γεγονότος  $A$  σαν άθροισμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Διακριτής Μεταβλητής  $n=k$  :

$$P(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(A|n=k)P(n=k)$$

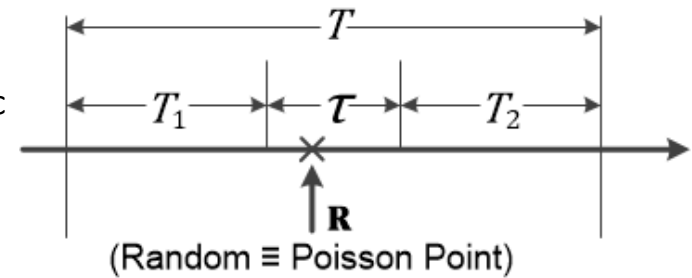
Συνολική Πιθανότητα Τυχαίας Μεταβλητής  $Y$  σαν Ολοκλήρωμα υπό Συνθήκη Πιθανοτήτων του συνόλου Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής  $X = x$ :

$$P(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} P(Y|X=x)f_X dx, \quad E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} E(Y|X=x)f_X dx = E_X[E(Y|X)]$$

- Θεωρείστε διάστημα  $T$  διαιρεμένο σε μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα  $T_1, \tau, T_2$  και αφίξεις Poisson με μέσο ρυθμό  $\lambda$  αφίξεις/sec

Η πιθανότητα  $k$  αφίξεων σε διάστημα  $t$  είναι

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,3, \dots, \quad E_t(k) = \sigma_t^2(k) = \lambda t$$



Αν υποθέσουμε πως έχουμε μια άφιξη Poisson  $R$  στο  $T$  με πιθανότητα  $P_1(T) = e^{-\lambda T}(\lambda T)$ . Η άφιξη αυτή θα συμβεί στο υποδιάστημα  $\tau$  με πιθανότητα:

$$P\{1 \text{ άφιξη Poisson στο } \tau \mid 1 \text{ άφιξη Poisson στο } T\} = [P_0(T_1) \times P_1(\tau) \times P_0(T_2)]/P_1(T) = \frac{\lambda \tau e^{-\lambda(T_1+\tau+T_2)}}{\lambda T e^{-\lambda T}} = \frac{\tau}{T}$$

Οι αφίξεις Poisson έχουν τη συμπεριφορά τυχαίων αφίξεων (**Poisson Arrivals  $\sim$  Random Arrivals**)

**Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages):** Η εργοδική κατανομή (και ο μέσος όρος) της κατάστασης  $S$  ουράς **M/G/N/K** (εφόσον υπάρχει) εκτιμάται σαν ο μακροχρόνιος λόγος του συνολικού χρόνου  $\tau_S$  που η κατάσταση έχει την συγκεκριμένη τιμή  $S$  προς το συνολικό διάστημα παρατήρησης  $T$ . **Οι εκτιμήσεις αυτές μπορεί να προκύψουν από καταγραφή της κατάστασης σε χρονικά σημεία αφίξεων Poisson με ενιαίο ρυθμό  $\lambda$ :**

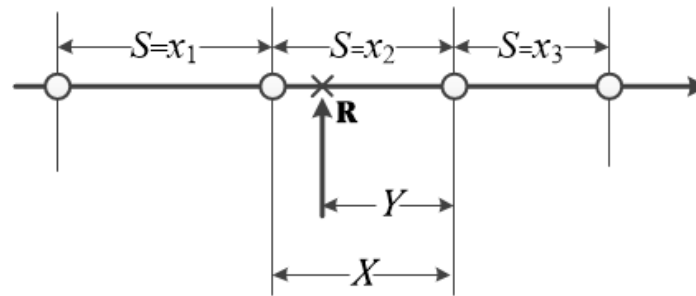
$$P\{n(t) = S\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau_S}{T} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A_S}{A} \cong \frac{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson όταν } n(t) = S, \text{ στο συνολικό διάστημα } \tau_S}{\text{Αρ. Αφίξεων Poisson στο συνολικό διάστημα } T}$$

# ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΝΑΝΕΩΣΗΣ

## Renewal Theory: Basic Definitions

- Στατιστικά Μοντέλα Χρόνου Ζωής (**Life-Time**), Αποτυχίας (**Failure-Times**), Αποκατάστασης (**Repair-Times**)
- Βασική παραδοχή: Τα διαστήματα μεταξύ διαδοχικών Σημείων Ανανέωσης (**renewals** που ορίζουν το Χρόνο Ζωής) είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές  $S$  με τιμές  $x \geq 0$ , ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την ίδια κατανομή  $F_S(x)$  (**i.i.d. - independent & identically distributed random variables**), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_S(x)$ , μέση τιμή  $E(S)$  και διασπορά  $\sigma_S^2 = E(S^2) - [E(S)]^2$ :

$$P\{S \in (x - dx, x)\} = f_S(x)dx, F_S(x) = P(S \leq x) = \int_{t=0}^x f_S(t)dt, E(S) = \int_{t=0}^{\infty} t f_S(t)dt, E(S^2) = \int_{t=0}^{\infty} t^2 f_S(t)dt$$



- Ένας άσχετος παρατηρητής του συστήματος σε τυχαίο χρονικό σημείο  $R$  (**Random Point** που σύμφωνα με την ιδιότητα **PASTA** ισοδυναμεί με τυχαία άφιξη **Poisson**) έχει πιθανότητα να βρεθεί σε διάστημα  $X$  με προτίμηση ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος  $x$ . Η απόσταση  $Y$  από το σημείο αυτό μέχρι το επόμενο renewal αποτελεί τον Υπολειπόμενο Χρόνο Ζωής (**Residual Life**)
- **Renewal Paradox:** Η τυχαία μεταβλητή  $X$  (**το μέγεθος του διαστήματος τυχαίας επιλογής**) έχει πυκνότητα πιθανότητας  $f_X(x)$  διαφορετική από την  $f_S(x)$

$$P\{R \in x | S=x\} = K \cdot x \quad (\text{τυχαία επιλογή ανάλογη με το μέγεθος του διαστήματος } x)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{t=0}^x P\{R \in t | S=t\} f_S(t) dt = \int_{t=0}^x K \cdot t \cdot f_S(t) dt$$

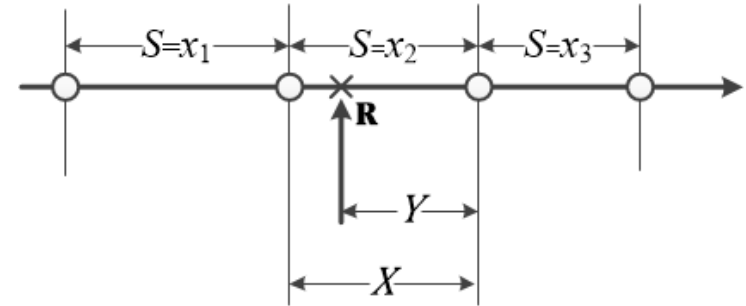
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = K \cdot x \cdot f_S(x), \quad \int_{x=0}^{\infty} f_X(x) dx = 1 = K \cdot \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x) dx \Rightarrow K = 1/E(S) \text{ και τελικά}$$

$$f_X(x) = x f_S(x) / E(S), \quad E(X) = E(S^2) / E(S)$$

# ΥΠΟΛΕΙΠΟΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΖΩΗΣ

## Residual Life & Renewal Paradox

- Επιλογή διαστήματος  $X = x$  από παρατηρητή που εμφανίζεται σε σημείο Poisson  $\mathbf{R}$ :  $f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{E(S)}$
- Ο Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής είναι τυχαία μεταβλητή  $Y$  με πυκνότητα πιθανότητας  $f_Y(y)$
- $P\{Y \in (y - dy, y) | X=x\} = \frac{P\{\mathbf{R} \in dy\}}{P\{\mathbf{R} \in x\}} = \frac{K \cdot dy}{K \cdot x} = dy/x$   
και από τον τύπο της συνολικής πιθανότητας

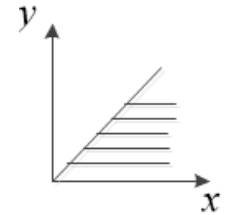


$$P\{Y \in (y - dy, y)\} = f_Y(y)dy = \int_{x=y}^{\infty} \frac{dy}{x} f_X(x)dx = \int_{x=y}^{\infty} \frac{f_S(x)}{E(S)} dy dx = \frac{dy}{E(S)} \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{1 - F_S(y)}{E(S)}$$

- Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος Ζωής (**Mean Residual Life**):

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{y=0}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{y=0}^{\infty} y \frac{1 - F_S(y)}{E(S)} dy = \frac{1}{E(S)} \int_{y=0}^{\infty} \left\{ y \int_{x=y}^{\infty} f_S(x) dx \right\} dy \\ &= \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \left\{ \int_{y=0}^x y dy \right\} dx = \frac{1}{E(S)} \int_{x=0}^{\infty} f_S(x) \frac{x^2}{2} dx = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \end{aligned}$$



$$E(Y) = \frac{E(S^2)}{2E(S)} = \frac{\sigma_S^2 + [E(S)]^2}{2E(S)} \geq \frac{E(S)}{2}$$

**Renewal Paradox:** Τυχαία ενδιάμεση παρατήρηση  $\mathbf{R}$  «προτιμά» κατά μέσο όρο μεγάλα διαστήματα  $S$

- Για **σταθερά** διαστήματα  $S$ :  $E(S) = S = 1/\mu$ ,  $\sigma_S^2 = 0$ ,  $E(Y) = S/2 = 1/(2\mu)$  και η μέση τιμή του «προτιμώμενου» διαστήματος είναι  $E(X) = E(S)$  (**αναμενόμενο**, χωρίς προκαταλήψεις λόγω απολύτως προβλέψιμου  $S$ )
- Για **εκθετικά** διαστήματα  $S$ :  $E(S) = 1/\mu$ ,  $\sigma_S^2 = 1/\mu^2$ ,  $E(Y) = E(S) = 1/\mu$  (ιδιότητα **έλλειψης μνήμης εκθετικής κατανομής**) και  $E(X) = 2E(S) = 2/\mu$  (**διπλάσιο της μέσης τιμής**  $E(S)$  με προκατάληψη λόγω απρόβλεπτου  $S$ )

# ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ & ΡΟΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

## Moment Generating Functions - MGF

Διακριτές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές  $n$  με τιμές  $k = 0, 1, 2, \dots$  και πιθανότητες  $p_k = P(n = k)$

- Ορίζουμε την **Ροπογεννήτρια Συνάρτηση (MGF)** σαν τον μετασχηματισμό  $z$

$$\mathbf{G}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, |z| \leq 1,$$

- Για  $|z|=1$ ,  $\mathbf{G}_n(1) = 1$  και οι παράγωγοί της MGF ως προς  $z$  δίνουν τις ροπές της  $n$ :

$$\mathbf{G}_n(1)' = E(n), \mathbf{G}_n(1)^{(m)} = E(n^m)$$

Παράδειγμα: Αφίξεις Poisson  $k$  με ρυθμό  $\lambda$  σε διάστημα  $t$  με πιθανότητες  $P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\mathbf{G}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$\mathbf{G}_n(1) = 1, \mathbf{G}_n(1)' = E(n) = \lambda t, \mathbf{G}_n(1)'' = E(n^2) = \lambda t + (\lambda t)^2, \sigma_n^2 = E(n^2) - [E(n)]^2 = \lambda t$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές  $X$  με τιμές  $t \geq 0$  και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_X(t)$

$$P\{X \in (t - \Delta t, t)\} = f_X(t)\Delta t, \quad F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{\tau=0}^t f_X(\tau) d\tau$$

- Ορίζουμε τον μετασχηματισμό **Laplace**  $\mathbf{F}_X(p)$  της  $f_X(t)$

$$\mathbf{F}_X(p) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} f_X(t) dt$$

- Για  $p = 0$  έχουμε αντίστοιχα  $\mathbf{F}_X(0) = 1$  και οι παράγωγοι ως προς  $p$  για  $p = 0$  δίνουν τις ροπές της  $X$ :

$$\mathbf{F}_X(0)' = -E(X), \mathbf{F}_X(0)^{(m)} = (-1)^m E(X^m)$$

Παράδειγμα: Εκθετική μεταβλητή  $X$  με μέσο όρο  $1/\mu$ ,  $f_X(t) = \mu e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$

$$\mathbf{F}_X(p) = \mu / (\mu + p)$$

$$\mathbf{F}_X(0) = 1, \mathbf{F}_X(p)' = -\mu / (\mu + p)^2, E(X) = -\mathbf{F}_X(0)' = 1/\mu, \mathbf{F}_X(p)'' = 2\mu / (\mu + p)^3, E(X^2) = \mathbf{F}_X(0)'' = 2/\mu^2$$

Παράδειγμα:  $X$  με σταθερή τιμή  $1/\mu$ ,  $f_X(t) = \delta(t - 1/\mu)$

$$\mathbf{F}_X(p) = e^{-p/\mu}, \mathbf{F}_X(0) = 1, \mathbf{F}_X(p)' = -(1/\mu)e^{-p/\mu}, E(X) = -\mathbf{F}_X(0)' = 1/\mu$$

$$\mathbf{F}_X(p)'' = 1/\mu^2 e^{-p/\mu}, E(X^2) = \mathbf{F}_X(0)'' = 1/\mu^2, \sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0$$

- **Άθροισμα ανεξαρτήτων** τυχαίων μεταβλητών  $\mathbf{F}_{X+Y}(p) = \mathbf{F}_X(p) \cdot \mathbf{F}_Y(p)$