

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

## Queuing Systems

**Εφαρμογές Κλειστών Δικτύων Ουρών Markov:**

- 1. Ανάλυση Window Flow Control σε Δίκτυα Υπολογιστών**
- 2. Αξιολόγηση Συστημάτων Πολύ-προγραμματισμού (Multitasking)**

**Γενίκευση Μοντέλων Μορφής Γινομένου (BCMP)**

**Βασίλης Μάγκλαρης**

[maglaris@netmode.ntua.gr](mailto:maglaris@netmode.ntua.gr)

**23/5/2017**

# ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

## Θεώρημα Gordon-Newell για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

$$X_1 \mu_1 = X_2 \mu_2$$

$$X_1 = 1, X_2 = \mu_1 / \mu_2 = \alpha$$

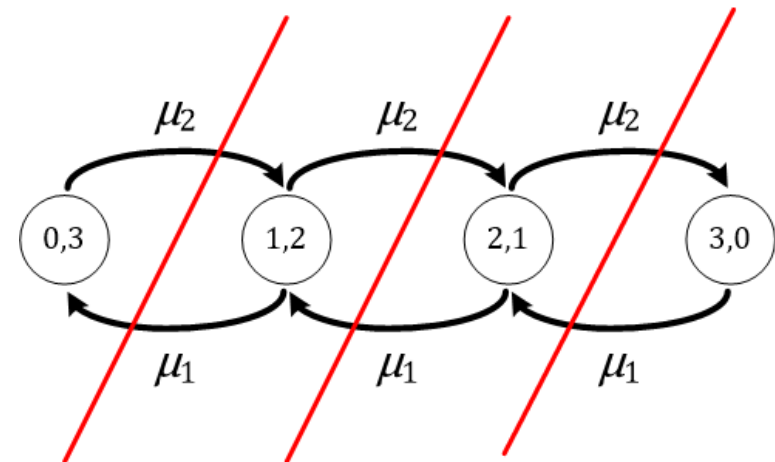
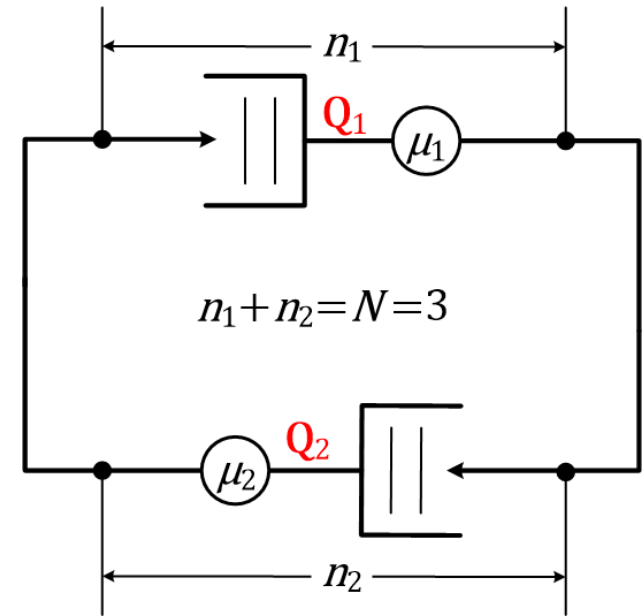
- $P(0,3) = X_2^3 / G(3) = \alpha^3 / G(3)$
- $P(1,2) = X_2^2 / G(3) = \alpha^2 / G(3)$
- $P(2,1) = X_2 / G(3) = \alpha / G(3)$
- $P(3,0) = 1 / G(3)$
- $1 / G(3) + \alpha / G(3) + \alpha^2 / G(3) + \alpha^3 / G(3) = 1$

$$\text{Άρα: } G(3) = 1 / (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)$$

$$\gamma = \mu_2 [1 - P(3,0)] = \mu_2 [1 - 1 / G(3)]$$

$$E(T_j) = E(n_j) / \gamma$$

- $E(n_1) = P(1,2) + 2P(2,1) + 3P(3,0) = \frac{[a^2 + 2a + 3]}{G(3)}$
- $E(n_2) = P(2,1) + 2P(1,2) + 3P(0,3) = \frac{[a + 2a^2 + 3a^3]}{G(3)}$
- $E(n_1) + E(n_2) = N = 3$



# ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (επανάληψη)

## Αλγόριθμος Buzen για $M = 2$ Ουρές, $N = 3$ Πελάτες

Με βάση τον αναδρομικό αλγόριθμο του **Buzen**

και  $X_1 = 1, X_2 = \mu_1/\mu_2 = a$  ισχύει ότι:

$$g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$$

$$G(N) = g(N, M)$$

Προκύπτει :

$$G(1) = 1 + a$$

$$G(2) = 1 + a + a^2$$

$$G(3) = 1 + a + a^2 + a^3$$

Πίνακας Τιμών  $g(n, m)$

$n$	$X_1$	$X_2$
0	1	1
1	1	$1 + a$
2	1	$1 + a + a^2$
3	1	$1 + a + a^2 + a^3$

Η χρησιμοποίηση της ουράς  $Q_1$  είναι

$$\begin{aligned} P(n_i \geq 1) &= P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1 - P(0,3) = X_i G(N - 1)/G(N) = X_1 G(2)/G(3) = \\ &= \frac{1+a+a^2}{1+a+a^2+a^3} \quad (\text{όπως και στη 2}^\eta \text{ διαφάνεια}) \end{aligned}$$

Επίσης:

$$P(0,3) = a^3/G(3)$$

$$P(1,2) = a^2/G(3)$$

$$P(2,1) = a/G(3)$$

$$P(3,0) = 1/G(3)$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$

$$E(n_1) = \sum_{k=1}^3 \frac{G(3 - k)}{G(3)} = \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

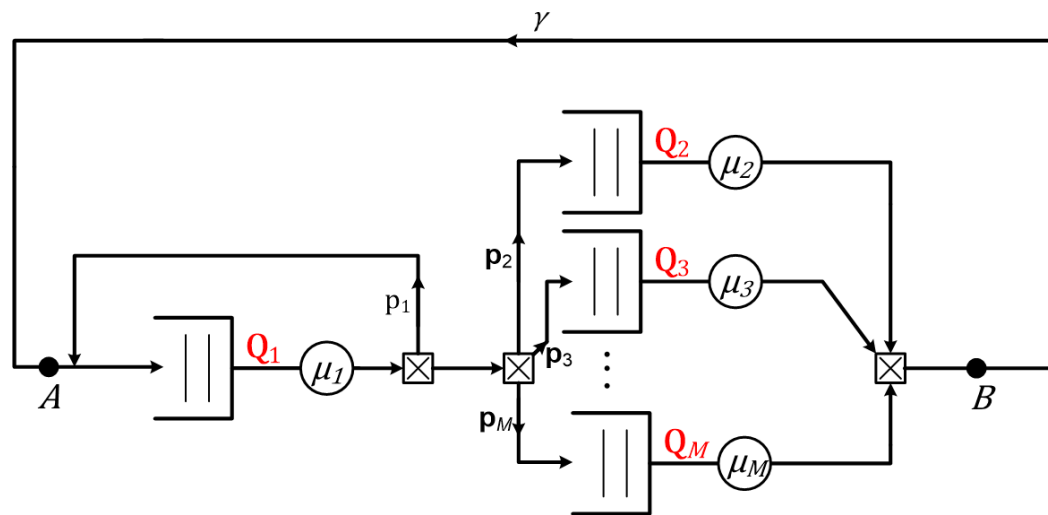
$$E(n_2) = \sum_{k=1}^3 X_2^k \frac{G(N - k)}{G(N)} = 3 - E(n_1) = \frac{a + 2a^2 + 3a^3}{1 + a + a^2 + a^3}$$

# ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/2) (επανάληψη)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM 16 (9), Sept. 1973

Κλειστό δίκτυο  $M$  εκθετικών ουρών  $Q_1$  (CPU),  $Q_2, \dots, Q_M$  (I/O)

Παράλληλη Επεξεργασία  $N$  προγραμμάτων (εντολών) με ανακύκλωση στη CPU (πιθανότητα  $p_1$ ), επιλογή Υποσυστήματος I/O (με πιθανότητες  $p_2, p_3, \dots, p_M$ ) και απάντηση - δημιουργία νέας εντολής (εξωτερική ανάδραση).



Εφαρμογή Αλγορίθμου *Buzen* για  $N = 1, 2, 3, 4$  πελάτες (παράλληλα προγράμματα) και  $M = 3$  ουρές  $Q_1, Q_2, Q_3$

$$\mu_1 X_1 = p_1 \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3$$

$$\mu_2 X_2 = p_2 \mu_1 X_1$$

$$\mu_3 X_3 = p_3 \mu_1 X_1$$

Με  $\mu_1 = \frac{1}{28} \text{msec}^{-1}$ ,  $\mu_2 = \frac{1}{40} \text{msec}^{-1}$ ,  $\mu_3 = \frac{1}{280} \text{msec}^{-1}$  και  $X_1 = 1$

προκύπτει πως  $X_2 = 1$ ,  $X_3 = 2$

Ο αναδρομικός τύπος  $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$  δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές  $G(N) = g(N, 3)$  αντιστοιχούν σε  $N = 1, 2, 3, 4$  προγράμματα  
 $G(1) = 4$ ,  $G(2) = 11$ ,  $G(3) = 26$ ,  $G(4) = 57$

Πίνακας Τιμών  $g(n, m)$

$n$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57

# ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/2) (επανάληψη)

Βασισμένο στο Παράδειγμα του *Jeffrey Buzen*, "Computational Algorithms for Closed Queuing Networks with Exponential Servers", *Communications of the ACM* 16 (9), Sept. 1973

Οι αντίστοιχοι βαθμοί  
χρησιμοποίησης  $U_1$  της CPU ( $Q_1$ )  
 $G(N)/G(N-1)$  είναι:

$N$	1	2	3	4
$U_1$	1/4	4/11	11/26	26/57

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος είναι

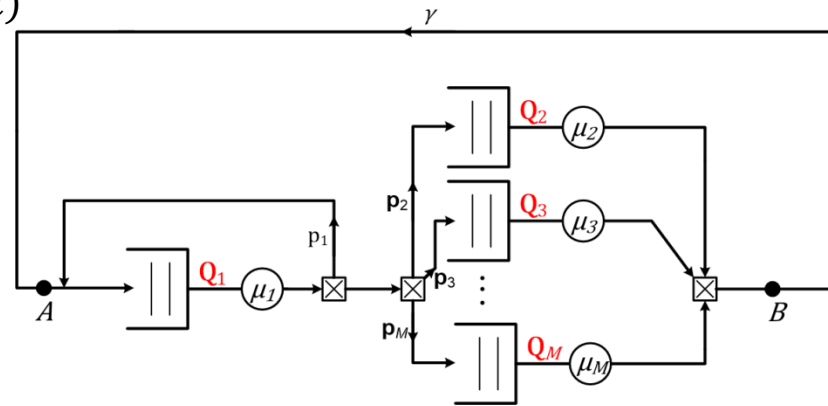
$$\begin{aligned} \gamma &= \mu_2 p(n_2 \geq 1) + \mu_3 p(n_3 \geq 1) \\ &= \mu_2 X_2 G(N-1)/G(N) + \mu_3 X_3 G(N-1)/G(N) \\ &= (\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) G(N-1)/G(N) \end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες τιμές σε προγράμματα/sec είναι:

$N$	1	2	3	4
$\gamma$	8.04	11.69	13	14.66

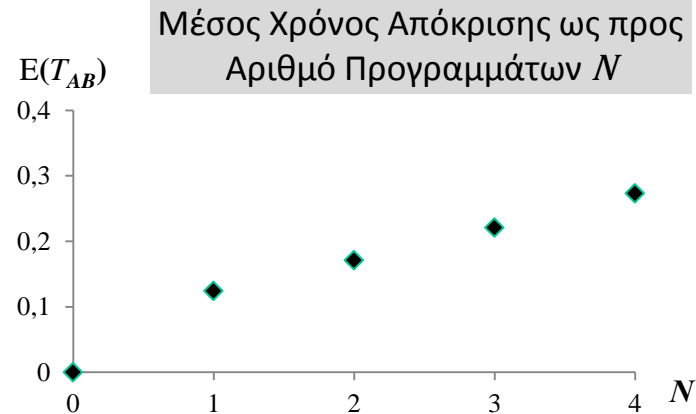
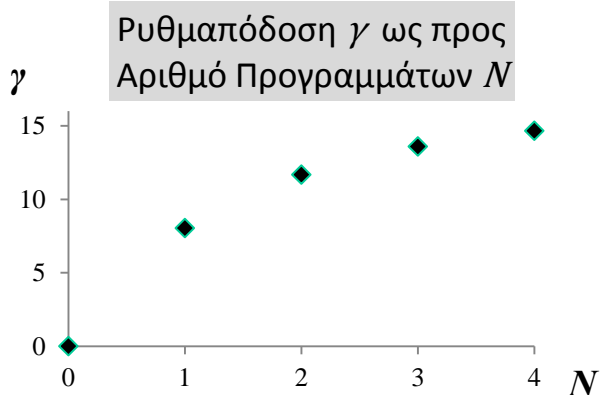
Πίνακας Τιμών  $g(n, m)$

$n$	$X_1$	$X_2$	$X_3$
0	1	1	1
1	1	2	4
2	1	3	11
3	1	4	26
4	1	5	57



Ο μέσος χρόνος απόκρισης είναι  $E(T_{AB}) = N/\gamma$   
Οι αντίστοιχες τιμές σε sec είναι:

$N$	1	2	3	4
$E(T_{AB})$	0.124	0.171	0.221	0.273



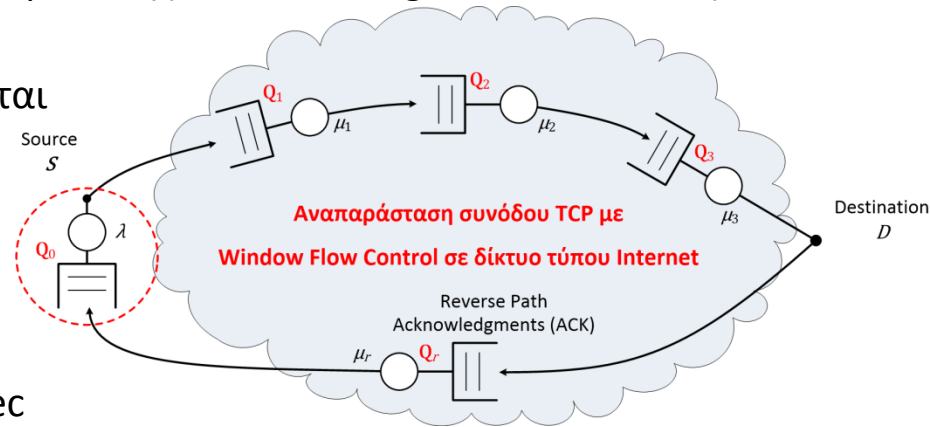
# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (1/10)

## End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W$ (επανάληψη)

Αναπαράσταση Μηχανισμού Ελέγχου Ροής Παραθύρου (**Window Flow Control**) μέσω Κλειστού Δικτύου  $M$  ανεξαρτήτων εκθετικών ουρών και  $W$  πελατών. Η μορφή των πελατών εναλλάσσεται ανάμεσα σε πακέτα δεδομένων, μηνύματα επιβεβαίωσης – acknowledgments και άδειες εκπομπής – tokens

Το κλειστό δίκτυο του παραδείγματος αποτελείται από  $M = 5$  υποσυστήματα:

- $Q_0$ : Αποθηκεύει τα Tokens στην πηγή (Source) με τον μηχανισμό Window Flow Control και αποστέλλει στον προορισμό (Destination) νέα πακέτα ανά χρονικά διαστήματα μέσης τιμής  $1/\lambda$  sec (μοντέλο δημιουργίας κίνησης  $\lambda$  πακέτα/sec)
- $Q_1, Q_2, Q_3$ : Ενδιάμεσοι δικτυακοί κόμβοι μεταγωγής πακέτου με μέσους εκθετικούς ρυθμούς  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  πακέτα/sec
- $Q_r$ : Ισοδύναμο μοντέλο καθυστέρησης για την δημιουργία και μεταβίβαση μηνυμάτων επιβεβαίωσης – ACK σαν ανεξάρτητη ουρά με μέσο εκθετικό ρυθμό  $\mu_r$  πακέτα/sec (θεωρούμε κατά προσέγγιση  $1/\mu_r \cong 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3$  sec)

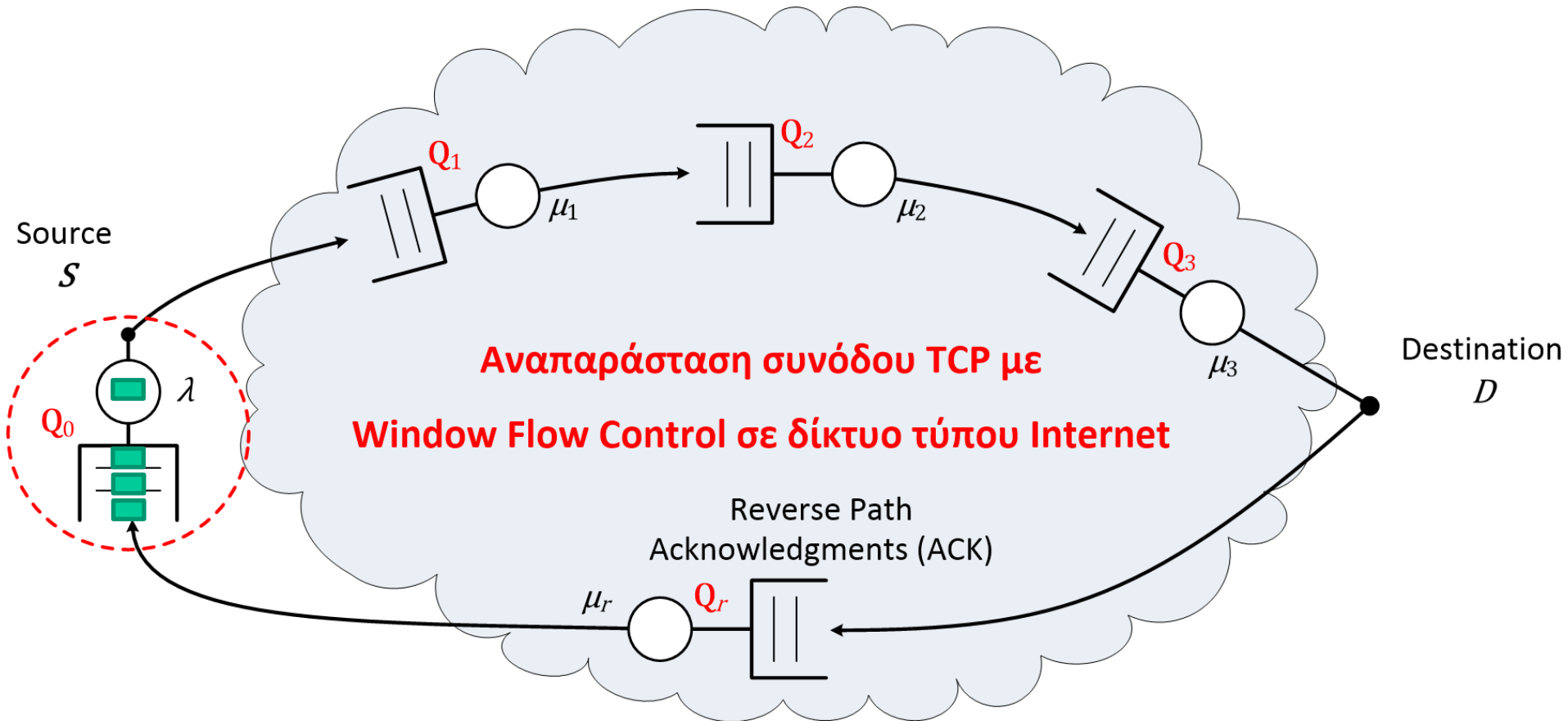


Στο κλειστό δίκτυο υπάρχουν ανά πάσα στιγμή  $W \leq 8$  πελάτες που αντιστοιχούν στο μέγεθος παραθύρου – Window Size:  $W = n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_r$

Θεωρούμε πως ισχύουν οι παραδοχές για μορφή γινομένου του θεωρήματος **Gordon – Newell** και εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο του **Buzen** για  $W = 1, \dots, 8$  πελάτες που κυκλοφορούν σε  $M = 5$  ουρές, ως προς την ρυθμαπόδοση  $\gamma$  και την μέση καθυστέρηση πακέτου από άκρο σε άκρο ( $S$  σε  $D$ ) στο δίκτυο  $E(T_{S,D}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)]/\gamma$

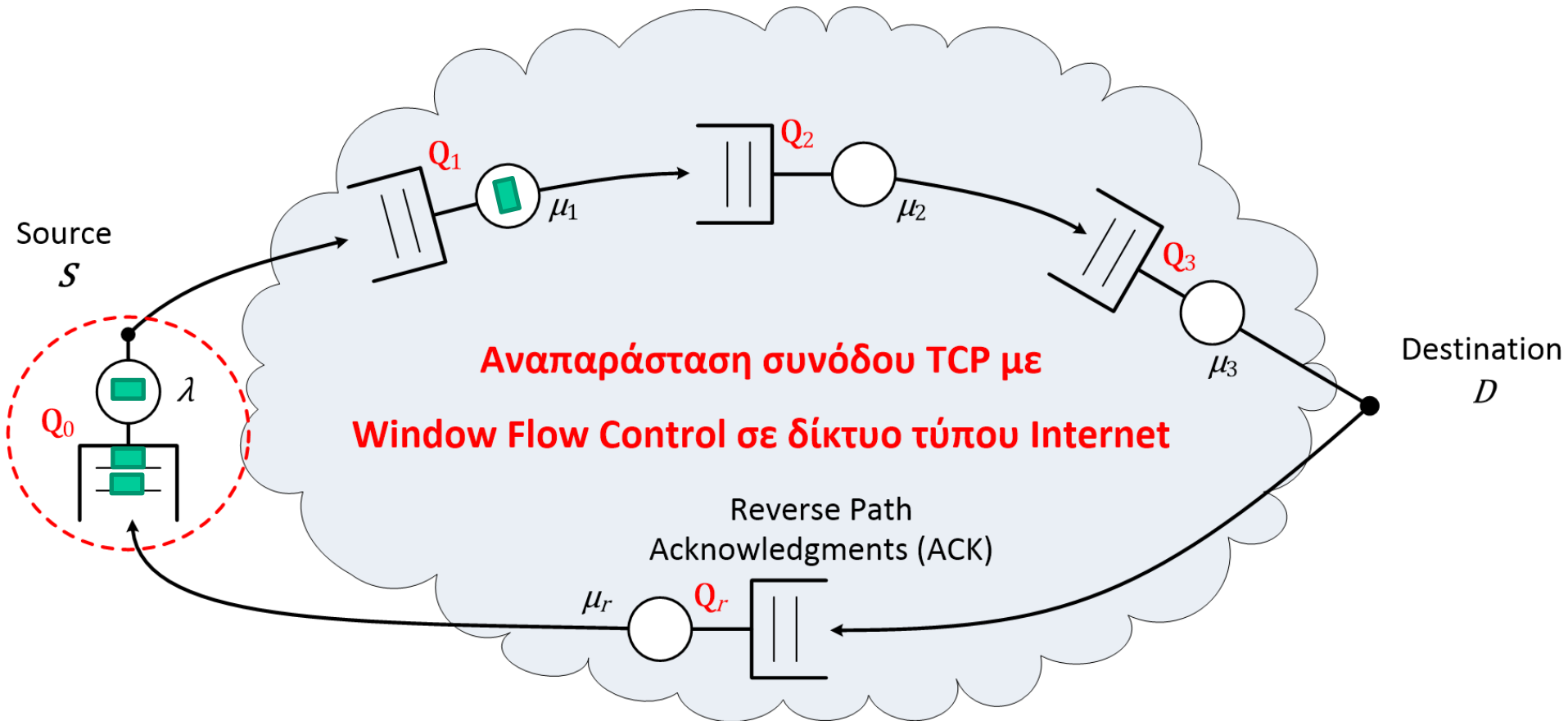
# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (2/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου  $W=4$   
(επανάληψη)



# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (3/10)

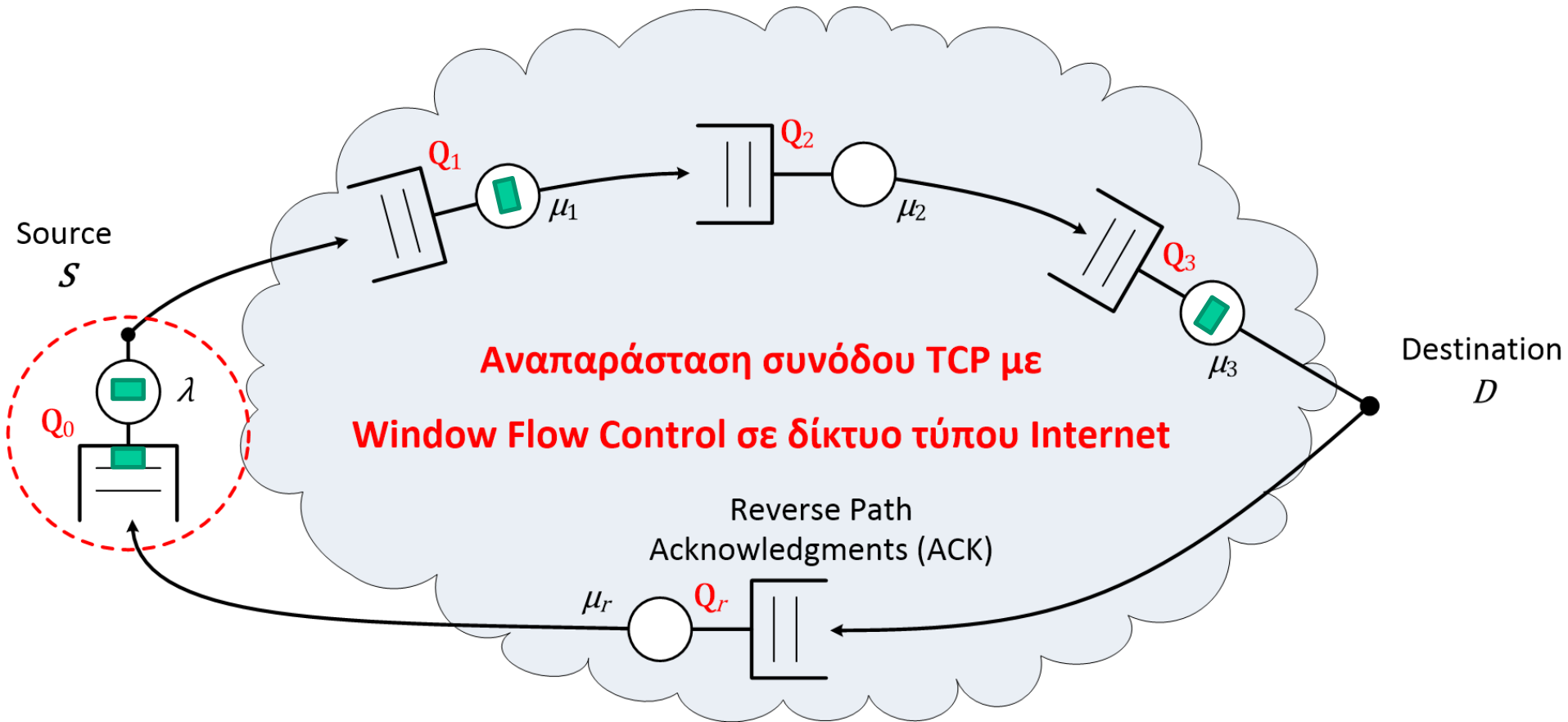
End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου  $W=4$   
(επανάληψη)





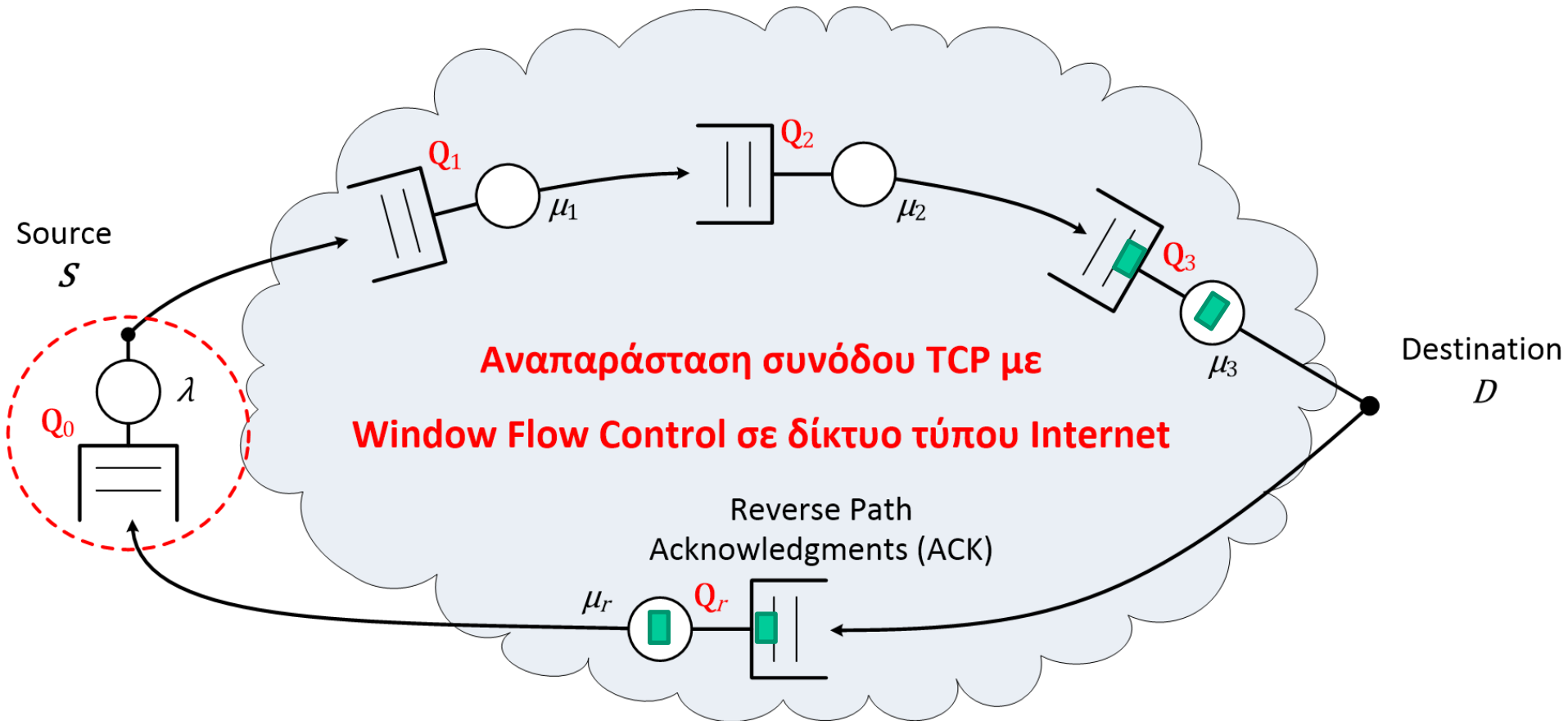
# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (4/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου  $W=4$   
(επανάληψη)



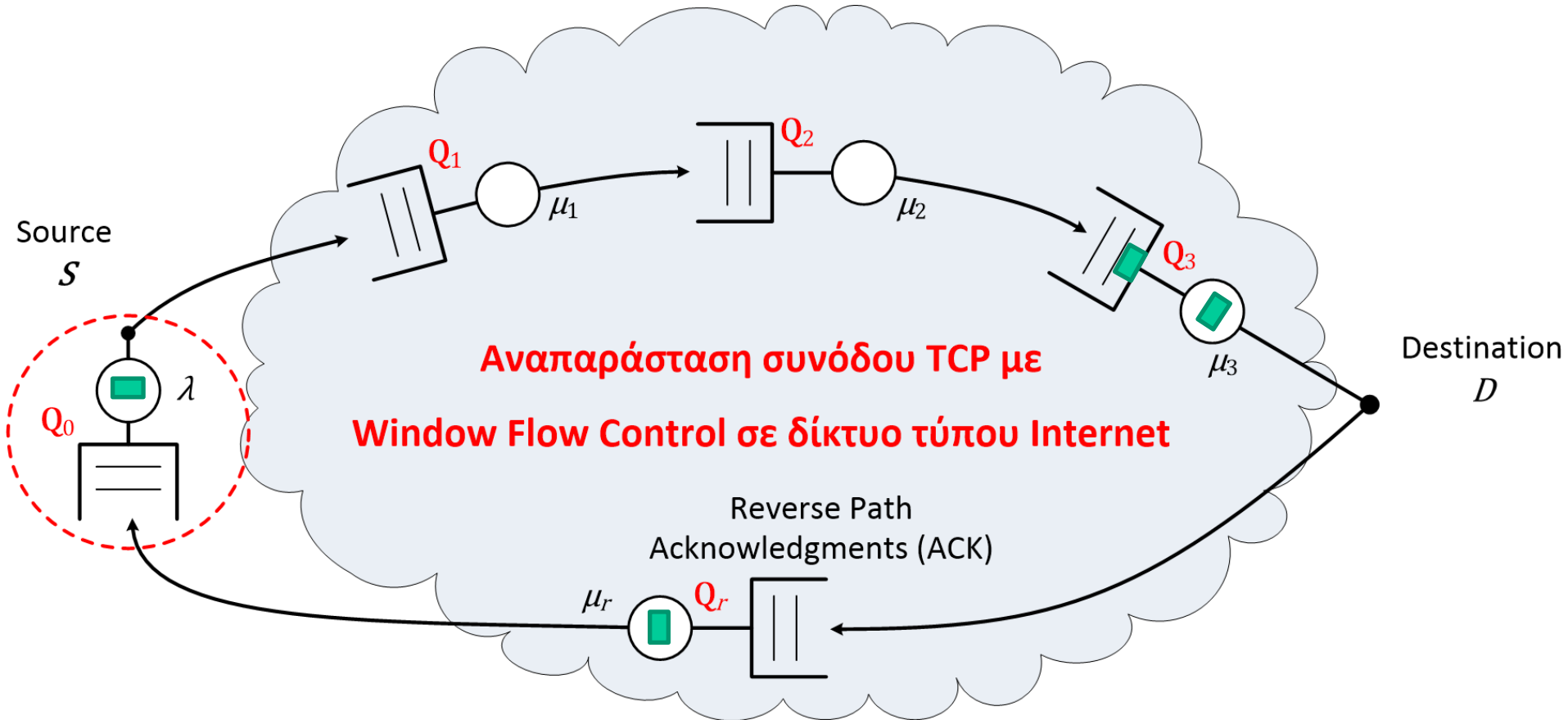
# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (5/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου  $W=4$   
(επανάληψη)



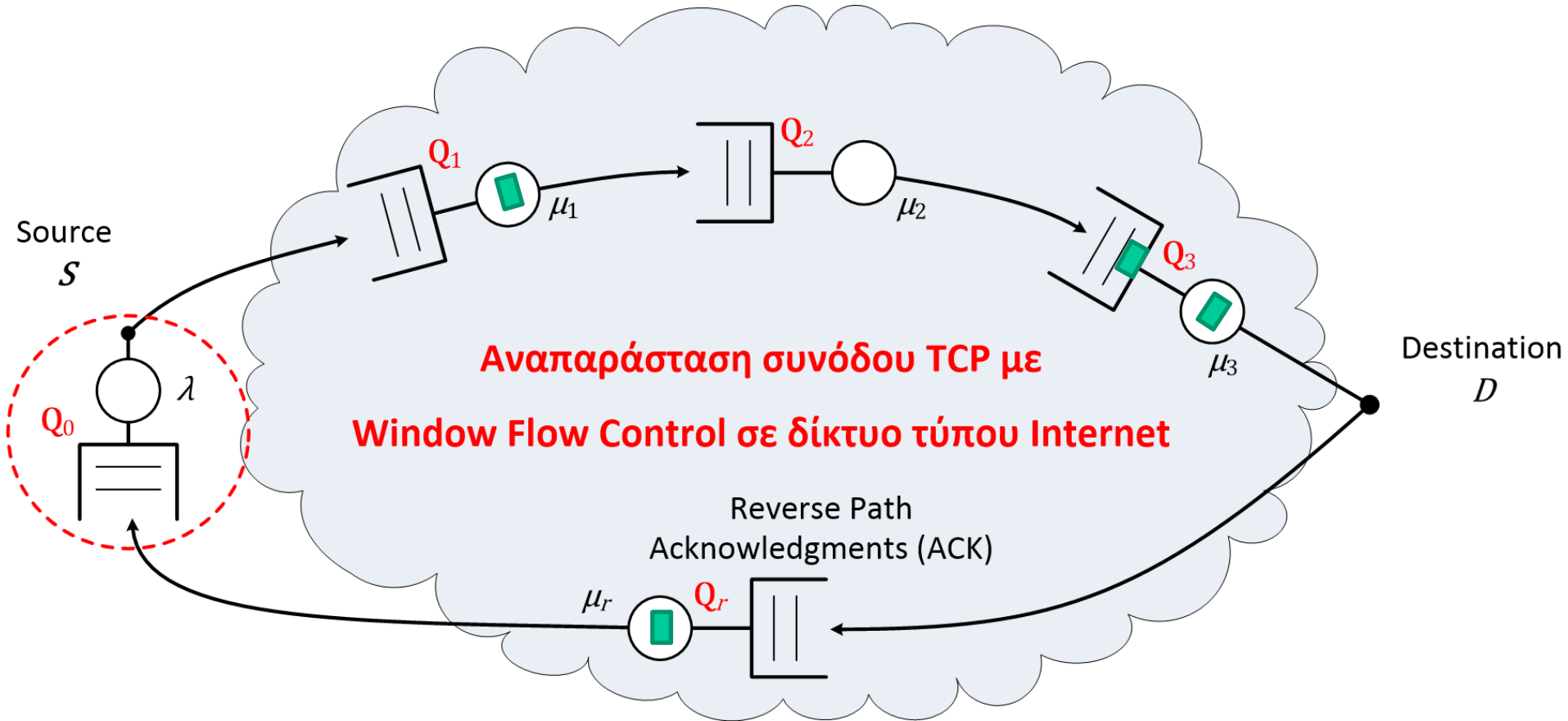
# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (6/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου  $W=4$   
(επανάληψη)



# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (7/10)

End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου  $W=4$   
(επανάληψη)



# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (8/10)

## End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 4$ (επανάληψη)

Υποθέτουμε πως  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$  πελάτες/sec

$$\frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = \frac{3}{2} \text{ sec ή } \mu_r = 2/3 \text{ πελάτες/sec}$$

Με  $X_0 = 1$  έχουμε:

$$\lambda X_0 = \mu_1 X_1 = \mu_2 X_2 = \mu_3 X_3 = \mu_r X_r$$

$$\text{Άρα: } X_1 = X_2 = X_3 = 0.5, X_r = 3/2$$

Ο αναδρομικός τύπος  $g(n, m) = g(n, m - 1) + X_m g(n - 1, m)$   
δίνει τον πίνακα δεξιά

Οι σταθερές  $G(W) = g(W, 5)$  αντιστοιχούν σε  $W = 1, \dots, 8$

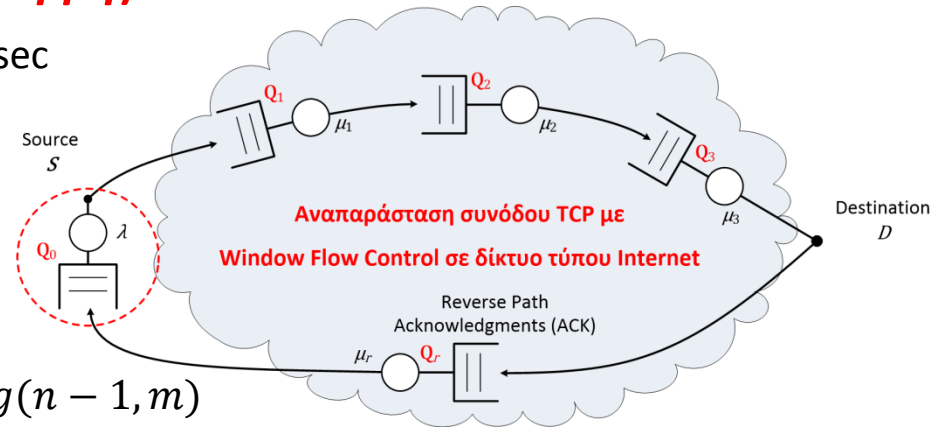
Η ρυθμαπόδοση του συστήματος  $\gamma$  σε πακέτα/sec είναι:

$$\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1) = \mu_1 X_1 G(W - 1) / G(W)$$

Η μέση καθυστέρηση πακέτων σε sec από το S στο D είναι

$$E(T_{SD}) = [E(n_1) + E(n_2) + E(n_3)] / \gamma, \text{ όπου}$$

$$E[n_i] = \sum_{k=1}^N X_i^k \frac{G(N - k)}{G(N)}$$



Πίνακας Τιμών  $g(n, m)$

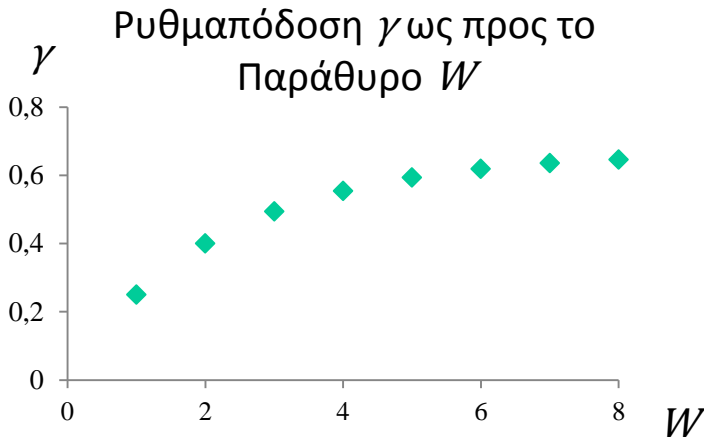
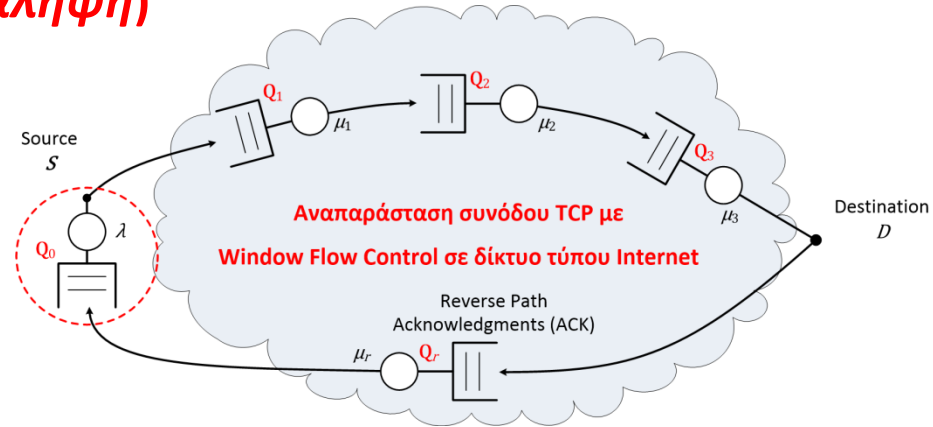
$W$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_r$
0	1	1	1	1	1
1	1	1.5	2	2.5	4
2	1	1.75	2.75	4	10
3	1	1.88	3.25	5.25	20.25
4	1	1.94	3.56	6.19	36.56
5	1	1.97	3.75	6.84	61.69
6	1	1.98	3.86	7.28	99.81
7	1	1.99	3.92	7.56	157.28
8	1	1.99	3.96	7.74	243.66

# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (9/10)

## End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$ (Επανάληψη)

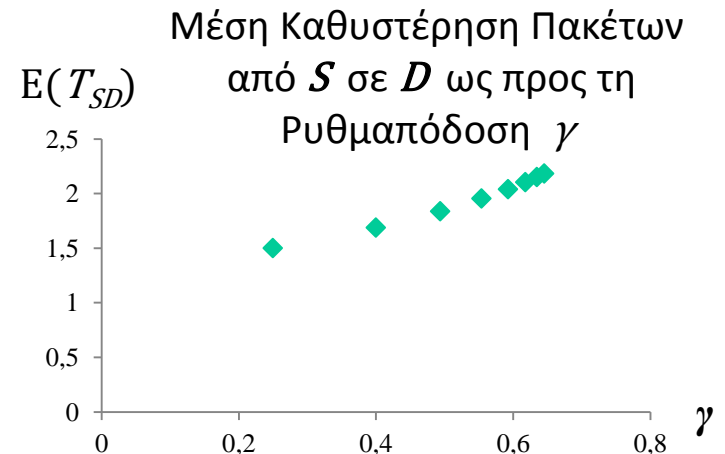
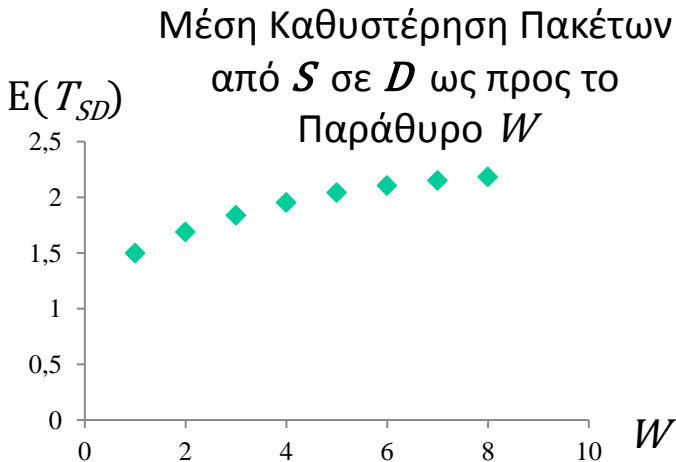
Ρυθμαπόδοση του συστήματος,  $\gamma = \mu_1 p(n_1 \geq 1)$ :

$W$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma$	0.25	0.4	0.49	0.55	0.59	0.62	0.63	0.65



Μέση καθυστέρηση πακέτου από το  $S$  στο  $D$ ,  $E(T_{SD})$ :

$W$	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	1.5	1.69	1.84	1.95	2.04	2.1	2.15	2.18



# ΕΛΕΓΧΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΑΚΡΟ ΣΕ ΑΚΡΟ ΣΤΟ INTERNET (10/10)

## End-to-End Window Flow Control TCP Session, Μέγεθος Παραθύρου $W = 1, \dots, 8$

### Σενάριο Συμφόρησης

Υποθέτουμε πως  $\lambda = 1$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1/2$  πελάτες/sec

$1/\mu_r = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3 = 6$  sec ή  $\mu_r = 1/6$

(ανεπαρκείς ταχύτητες γραμμών  $\Rightarrow$  **συμφόρηση**)

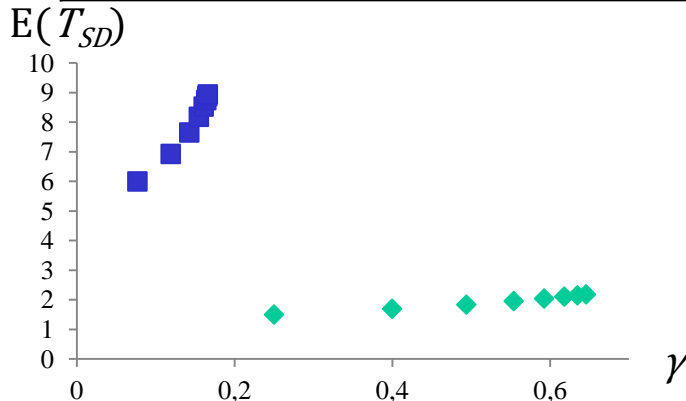
Έχουμε  $X_0 = 1$ ,  $X_1 = X_2 = X_3 = 2$ ,  $X_r = 6$

Η ρυθμαπόδοση του συστήματος  $\gamma$  είναι:

$W$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma$	0.077	0.119	0.142	0.155	0.161	0.164	0.165	0.166

Η μέση καθυστέρηση πακέτων  $E(T_{SD})$  είναι:

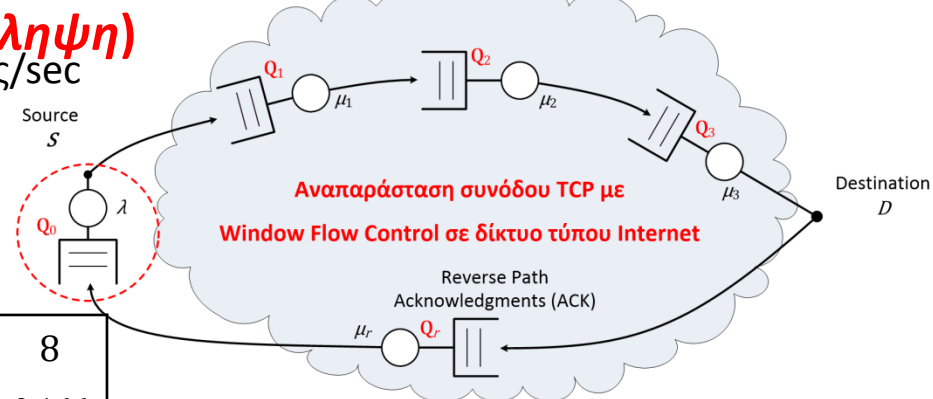
$W$	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(T_{SD})$	6	6.92	7.65	8.18	8.53	8.75	8.87	8.94



### Σύγκριση Επίδοσης Σεναρίων για Αυξανόμενες τιμές του $W$

■ Συμφόρηση στο Δίκτυο ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0.5, \lambda = 1$ )

◆ Δίκτυο με καλή επίδοση ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2, \lambda = 1$ )



### Πίνακας Τιμών $g(n, m)$

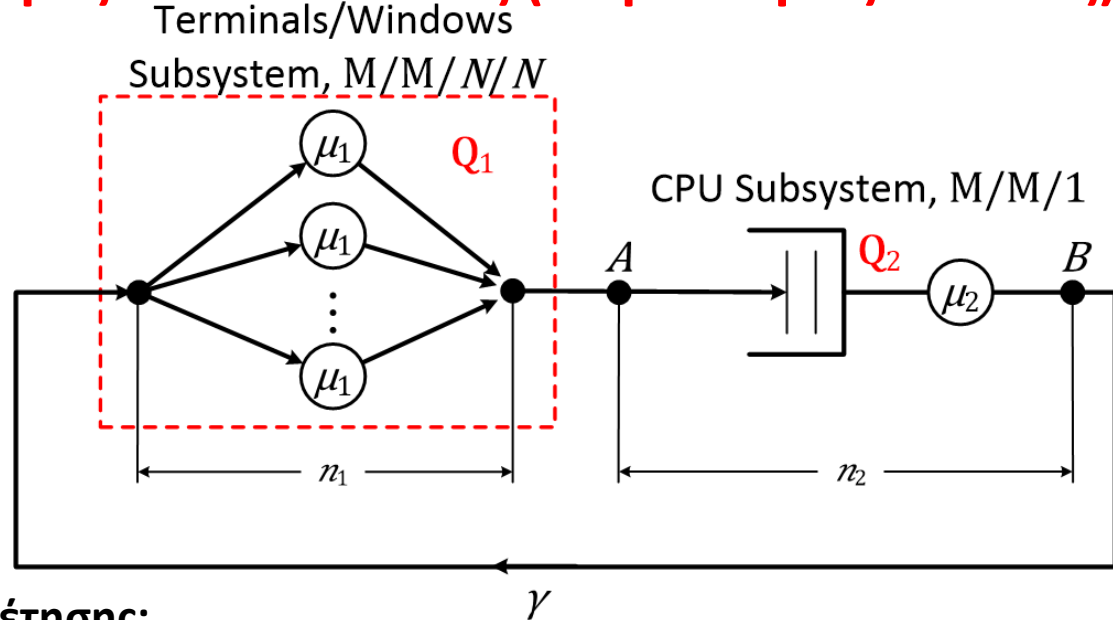
$W$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_r$
0	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	13
2	1	7	17	31	109
3	1	15	49	111	765
4	1	31	129	351	4941
5	1	63	321	1023	30669
6	1	127	769	2815	186829
7	1	255	1793	7423	1128397
8	1	511	4097	18943	6789325

**Στην περίπτωση συμφόρησης, ανεκτή καθυστέρηση απαιτεί μικρές τιμές του  $W$  με σημαντικούς περιορισμούς ωφέλιμης ρυθμαπόδοσης**

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (1/4)

## Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και $N$ Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

Το μοντέλο θεωρεί  $N$  πελάτες που περιφέρονται σε κλειστό δίκτυο. Εναλλάσσονται σε δύο υποσυστήματα, είτε με τη μορφή σκέψης ενός «χρήστη» (τερματικό ή ενεργό παράθυρο) για την παραγωγή (**input**) νέας εντολής, ή με τη μορφή επεξεργασίας εντολών που έχουν κατατεθεί και αναμένεται η απόκριση (**output**) στον «χρήστη»



### Μοντέλα 2 Υποσυστημάτων Εξυπηρέτησης:

- **Υποσύστημα Παραγωγής Εντολών:**  $Q_1$ ,  $M/M/\infty$  (ή  $M/M/N/N$ ) με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης (**Thinking Time**,  $T_{TH}$ ) μέσης τιμής  $E(T_{TH}) = 1/\mu_1$   
Ο χρόνος  $T_{TH}$  αντιστοιχεί με τον χρόνο «σκέψης» για την σύνταξη μιας νέας εντολής εισόδου (**input**) σε συνέχεια της απόκρισης (**output**) από προηγούμενη εντολή
- **Υποσύστημα Επεξεργασίας Εντολών:**  $Q_2$ ,  $M/M/1$  με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης  $1/\mu_2$  και μέσο χρόνο καθυστέρησης (**Processing Time**,  $T_{PR}$ ) μέσης τιμής  $E(T_{PR})$   
Η ουρά  $Q_2$  αντιστοιχεί με το συνολικό σύστημα επεξεργασίας εντολών (CPU, I/O) σαν συναθροισμένο ισοδύναμο μοντέλο (**aggregate equivalent**, γενικεύεται σαν **Ισοδύναμο Norton**)



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (2/4)

## Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και $N$ Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

### Ανάλυση Κλειστού Δικτύου Markov

Εργοδικές Καταστάσεις  
 $\mathbf{n} = (n_1, n_2), n_1 + n_2 = N$

### Εξισώσεις Ισορροπίας:

$$\mu_2 P(0, N) = \mu_1 P(1, N - 1)$$

$$\mu_2 P(k, N - k) = (k + 1) \mu_1 P(k + 1, N - k + 1)$$

$$\mu_2 P(N - 1, 1) = N \mu_1 P(N, 0)$$

Αν  $a \triangleq \mu_2 / \mu_1 \Rightarrow P(k, N - k) = P(0, N) \frac{a^k}{k!}$

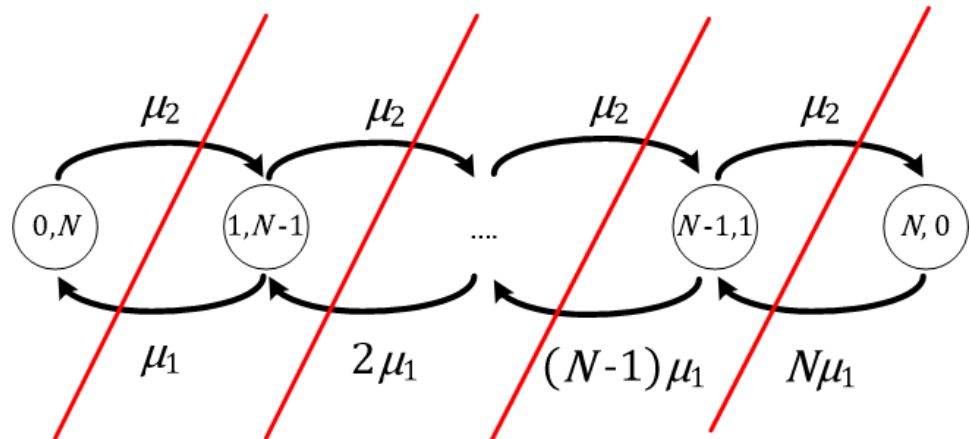
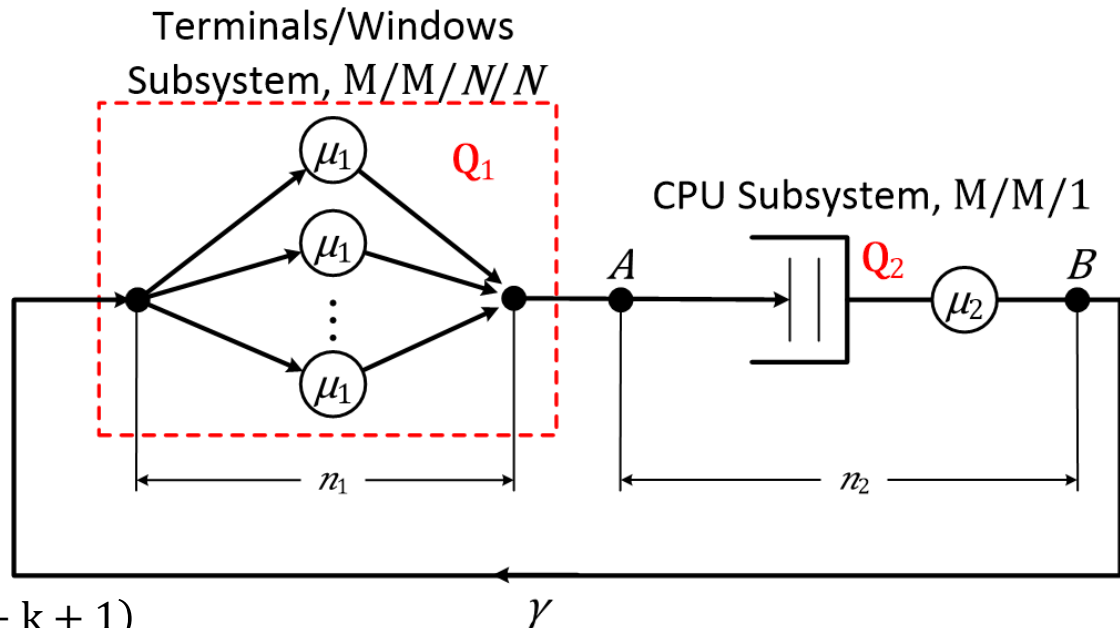
και  $P(k, N - k) = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{n=0}^N \frac{a^n}{n!}}$

Υπολογισμοί όπως για Erlang-B:

$$P(N, 0) = B(a, N), P(N - 1, 1) = N \mu_1 B(a, N), \dots$$

$$E(n_2) = \sum_{k=1}^N k P(N - k, k) \text{ και η ρυθμαπόδοση } \gamma = \mu_2 [1 - P(N, 0)] \text{ εντολές/sec}$$

Η Μέση Καθυστέρηση Εντολών στο Υποσύστημα Επεξεργασίας είναι  $E(T_{PR}) = E(n_2) / \gamma \text{ sec}$

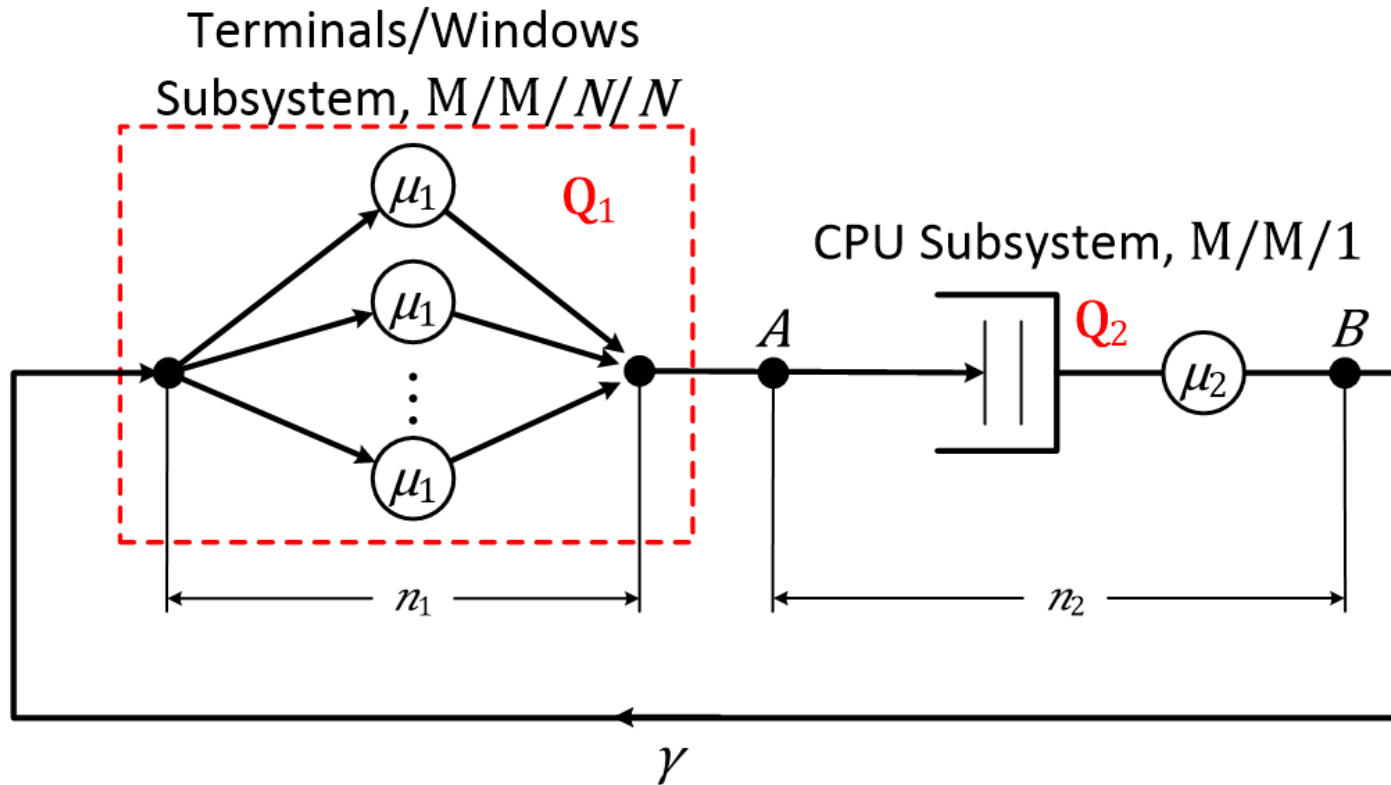


# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (3/4)

## Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και $N$ Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)

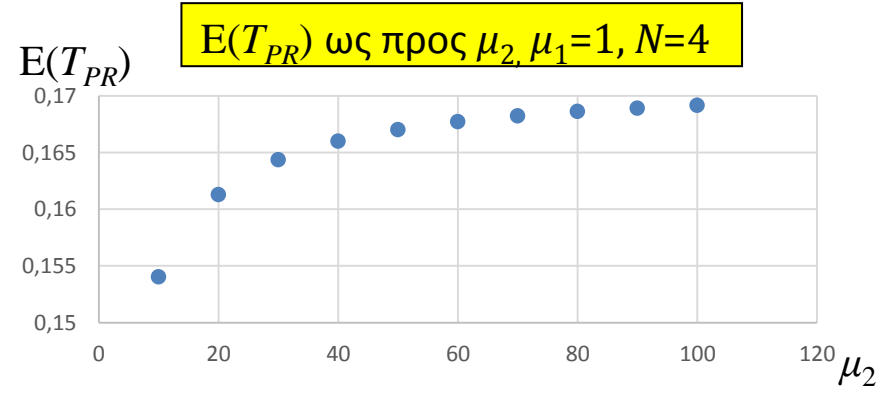
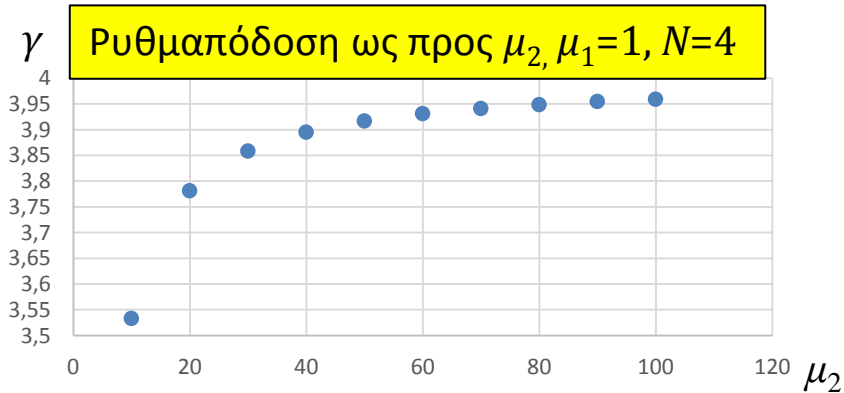
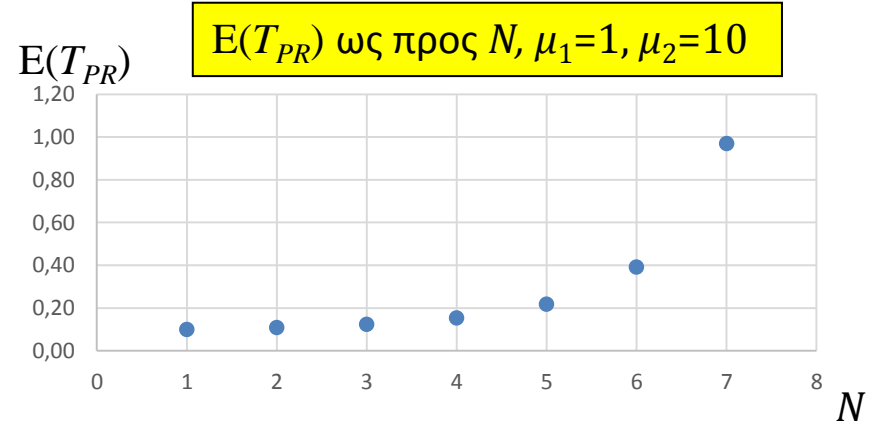
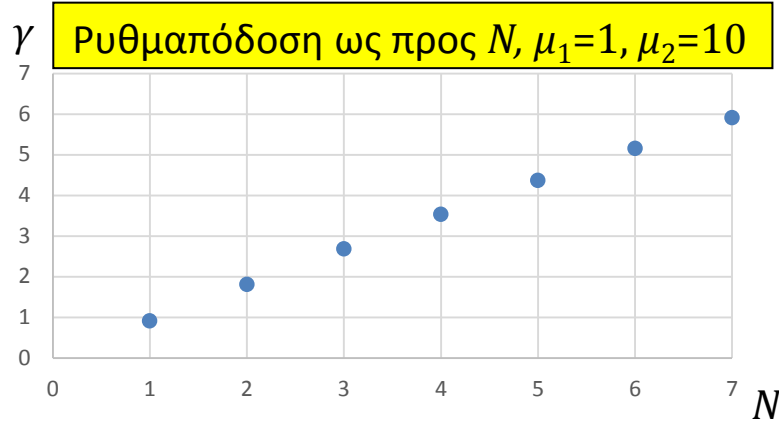
Αριθμητικά Αποτελέσματα:

Εφαρμογή της ανάλυσης για τιμές των  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 10$  ( $\alpha = \frac{\mu_2}{\mu_1} = 10$ ) και μεταβάλλοντας τις δυνατότητες παραλληλισμού (Βαθμός Πολύ-προγραμματισμού, **Degree of Parallelism - Multitasking**)  $N = 1, \dots, 7$



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΟΛΥ-ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ (4/4)

## Κλειστό Δίκτυο με $M = 2$ Ουρές και $N$ Πελάτες (Παράλληλες Εντολές)



### Συμπεράσματα:

**1.** Για αυξανόμενο βαθμό πολύ-προγραμματισμού  $N$  αναμένεται βελτίωση της Ρυθμαπόδοσης  $\gamma$  προς ένα μέγιστο όριο, με παράλληλη αύξηση της Μέσης Καθυστέρησης Επεξεργασίας Εντολών  $E(T_{PR})$

**2.** Όσο μειώνεται ο Μέσος Χρόνος Σκέψης  $E(T_{TH}) = 1/\mu_1 \rightarrow 0$  των χρηστών για  $N = 4$  βελτιώνεται η Ρυθμαπόδοση  $\gamma$  και αυξάνεται η Μέση Καθυστέρηση Επεξεργασίας Εντολών, συγκλίνοντας προς τα αποτελέσματα ουράς M/M/1 ρυθμού εισόδου  $\gamma$  και ρυθμού εξυπηρέτησης  $\mu_2$ :  $E(T_{PR}) \rightarrow \frac{1/\mu_2}{1-\gamma/\mu_2} \cong 0.166$

# ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΓΙΑ ΔΙΚΤΥΑ ΟΥΡΩΝ ΜΕ ΕΡΓΟΔΙΚΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΜΟΡΦΗΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

- **BCMP Networks:** F. **B**asket, K.M. **C**handi, R.H. **M**untz, F.C. **P**alacios: “Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers”, Journal of the ACM, 22 (2), April 1975
- **Παραδοχές:**
  - Δίκτυο  $M$  συστημάτων εξυπηρέτησης (ουρών)  $Q_i$  των εξής τύπων:
    1. Εξυπηρέτησης **FCFS (FIFO)  $M/M/1$**  με εκθετικό εξυπηρετητή  $1/\mu_i$  και ενιαίο τύπο πελατών
    2. Εξυπηρέτησης **Processor Sharing  $M/G/1$**  με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
    3. Ουρές με άπειρους εξυπηρετητές  **$M/G/\infty$**  με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
    4. Εξυπηρέτησης **LCFS (with pre-emptive resume)  $M/G/1$**  με πολλαπλές κλάσεις (τύπους, chains) πελατών
  - Για τις περιπτώσεις 2-4 η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης πρέπει να έχει μετασχηματισμό Laplace μορφής κλάσματος (rational Laplace Transform)
  - Η δρομολόγηση μεταξύ ουρών γίνεται με τυχαίο τρόπο
  - Ισχύει η παραδοχή ανεξαρτησίας του Kleinrock
  - Poisson εξωτερικές αφίξεις
- **Αποτέλεσμα:** Η εργοδική πιθανότητα (αν υπάρχει) του διανύσματος κατάστασης  $(x_1, x_2, \dots, x_M)$  του δικτύου δίνεται σε μορφή γινομένου παραγόντων εξαρτώμενων από την κατάσταση της κάθε ουράς:  $p(x_1, x_2, \dots, x_M) = C \times \pi_1(x_1) \times \pi_2(x_2) \times \dots \times \pi_M(x_M)$  *(απόδειξη με επαλήθευση εξισώσεων ισορροπίας μεταβάσεων)*