# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
# Queuing Systems

## Εφαρμογές Θεωρήματος Jackson:
## (i) Δίκτυα Μεταγωγής Πακέτου
## (ii) Υπολογιστικά Μοντέλα Πολυεπεξεργασίας

**Βασίλης Μάγκλαρης**

maglaris@netmode.ntua.gr

**3/5/2017**

# ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (Επανάληψη)

## ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

**Παραδοχές**

- Ανοικτό δίκτυο $M$ ***δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού*** (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i$ , $i = 1,2, \ldots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης $\mu_i$

- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: ***Ανεξάρτητες ροές Poisson*** μέσου ρυθμού $\gamma_{sd}$ όπου $s, d \in \{1,2, \ldots, M\}$

- Εσωτερική ***δρομολόγηση*** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{j}}$ : $r_{ij}$

- Έστω $\delta_{sd}(i) = 1$ αν πελάτες (πακέτα) της ροής $(s, d)$ διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_i$ ή αλλιώς $\delta_{sd}(i) = 0$. Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_i$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \gamma_{sd} \delta_{sd}(i)$

- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (***Kleinrock's Independence Assumption***, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

# ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (Επανάληψη)

## ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

## Αποτέλεσμα

- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$ αριθμού πελατών $n_i$ στις ουρές (κόμβους κορμού) $\mathbf{Q}_i$

- Η ***Εργοδική Πιθανότητα*** των καταστάσεων $\boldsymbol{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) ***ανεξαρτήτων ουρών M/M/1***

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2, \dots, n_M) = P(n_1)P(n_2)\dots P(n_M)$$

$$P(n_i) = (1 - \rho_i){\rho_i}^{n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

  όπου $\lambda_i$ ο συνολικός μέσος ρυθμός (***Poisson***) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i$

- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η $\mathbf{Q}_i$ με το μέγιστο $\rho_i$

- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{E}(n_\iota) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$

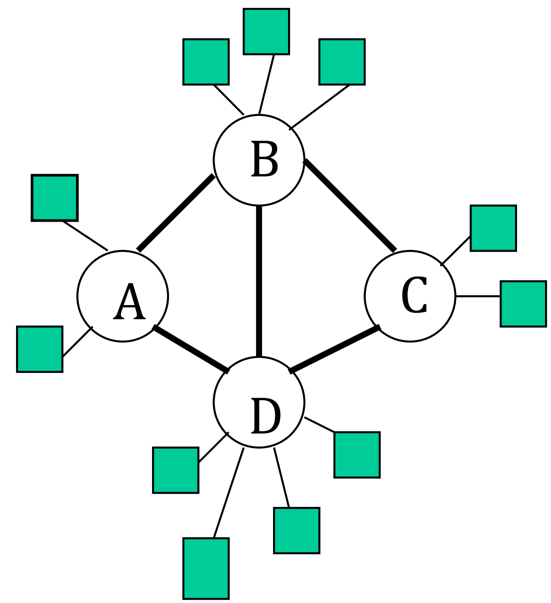
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\boldsymbol{\gamma}$ (***τύπος Little***)

  όπου $\boldsymbol{\gamma}$ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (***Poisson***) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (***network throughput***) $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{s=1}^{M} \sum_{d=1}^{M} \gamma_{sd}$

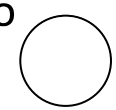
- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο $s$ σε κόμβο $d$: $\mathrm{E}(T_{sd}) = \sum_{i-1}^{M} \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1-\rho_i}$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΟΥ (1/4)

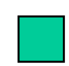
- Θεωρούμε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων (**Internet – Intranet**) 4 κόμβων (**routers**) κορμού όπως στο σχήμα
  - Όλες οι γραμμές κορμού (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10$ Gbits/sec. Τα πακέτα έχουν μήκος $L$ εκθετικά κατανεμημένο με μέση τιμή $\mathrm{E}(L) = 1000$ bits (θεωρείστε εκθετική κατανομή)
  - Μεταξύ κόμβων πηγής και προορισμού τα πακέτα προσφέρονται σε ροές Poisson με ίσους συνολικούς ρυθμούς $r$ packets/sec (από άκρο σε άκρο μεταξύ κόμβων κορμού, σύνολο $3 \times 4$ ροές)
  - Πακέτα από το $\mathrm{A}$ στο $\mathrm{C}$ και αντίστροφα δρομολογούνται με τυχαία δρομολόγηση $p, (1-p)$ στους δύο ισότιμους δρόμους: $(\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C})$ και $(\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C})$. Θεωρούμε πως $p = 0.5$
  - Πακέτα μεταξύ κόμβων κορμού κατευθείαν συνδεδεμένων $(\mathrm{A}-\mathrm{B}), (\mathrm{A}-\mathrm{D}), (\mathrm{B}-\mathrm{D}), (\mathrm{B}-\mathrm{C}), (\mathrm{D}-\mathrm{C})$ δρομολογούνται κατευθείαν




- (**1**) Ζητείται ο ρυθμός των 12 ροών $r$ ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι $50\%$
- (**2**) Με το $r$ του (**1**) ζητείται η μέση καθυστέρηση από άκρο σε άκρο στο δίκτυο κορμού ενός τυχαίου πακέτου



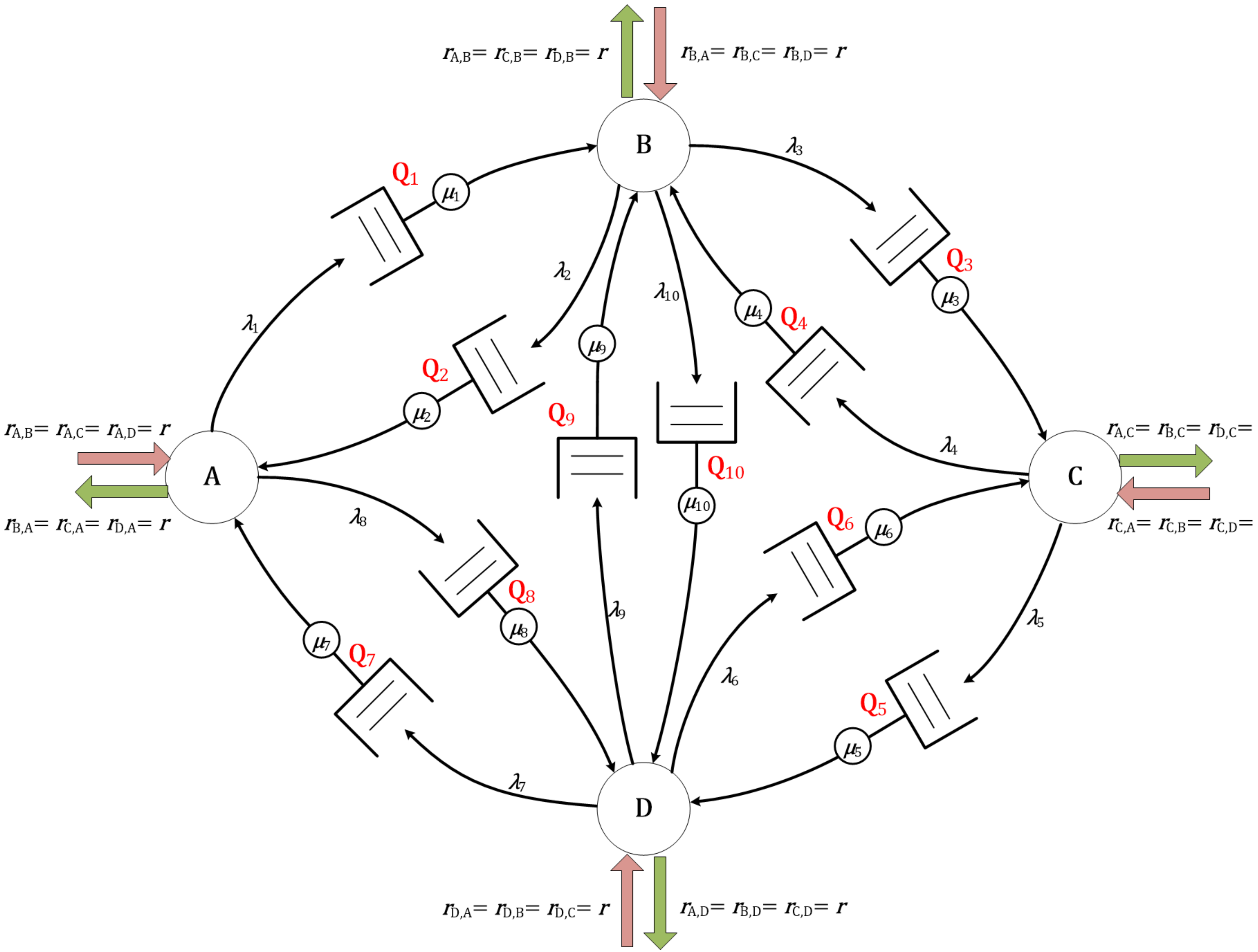
**Κόμβος Δικτύου Κορμού** (Δρομολογητής Κορμού, Backbone Router, Packet Switch)



**Κόμβος Εισόδου** (Η/Υ, Access Node, Customer Network - LAN)

> **ΟΔΗΓΙΑ:** Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού $\lambda_i$ (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i/\mathrm{E}(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΟΥ (2/4)



# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (3/4)

Απάντηση στο Ερώτημα (**1**)

Με πιθανότητα διαχωρισμού $p = 0.5$, οι ρυθμοί $\lambda_i$ (packets/sec) στις 10 ανεξάρτητες (***M/M/1***) ουρές $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_{10}$ (***κατευθυντικές συνδέσεις/γραμμές μεταξύ κόμβων κορμού του δικτύου***) είναι:

$$\lambda_1 = r_{\mathrm{A,B}} + pr_{\mathrm{A,C}} = 1.5r,\ \lambda_2 = r_{\mathrm{B,A}} + pr_{\mathrm{C,A}} = 1.5r$$
$$\lambda_3 = r_{\mathrm{B,C}} + pr_{\mathrm{A,C}} = 1.5r,\ \lambda_4 = r_{\mathrm{C,B}} + pr_{\mathrm{C,A}} = 1.5r$$
$$\lambda_5 = r_{\mathrm{C,D}} + (1-p)r_{\mathrm{A,C}} = 1.5r,\ \lambda_6 = r_{\mathrm{D,C}} + (1-p)r_{\mathrm{C,A}} = 1.5r$$
$$\lambda_7 = r_{\mathrm{D,A}} + (1-p)r_{\mathrm{C,A}} = 1.5r,\ \lambda_8 = r_{\mathrm{A,D}} + (1-p)r_{\mathrm{A,C}} = 1.5r$$
$$\lambda_9 = r_{\mathrm{D,B}} = r,\ \lambda_{10} = r_{\mathrm{B,D}} = r$$

Οι ρυθμοί εξυπηρέτησης $\mu_i$ (packets/sec) και οι εντάσεις φορτίου $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ (Erlangs) είναι:

$$\mu_i = C/\mathrm{E}(L) = (10 \times 10^9)/10^3 = 10^7 \text{ packets/sec}$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_8 = 1.5r \times 10^{-7},\ \rho_9 = \rho_{10} = r \times 10^{-7} \text{ Erlangs}$$

Οι ***γραμμές συμφόρησης*** είναι οι αμφίδρομες γραμμές διασύνδεσης μεταξύ των κόμβων $\mathrm{A-B},\ \mathrm{B-C},\ \mathrm{C-D},\ \mathrm{D-A}$ με $\rho_i = 1.5r \times 10^{-7}$ Erlangs

Άρα για να έχουν οι γραμμές συμφόρησης ένταση φορτίου 0.5 Erlangs πρέπει οι ρυθμοί ροών πακέτων $r$ να ικανοποιούν τη σχέση $1.5r \times 10^{-7} = 0.5 \Rightarrow r = 10^7/3$ πακέτα/sec

οπότε $\rho_1 = \cdots = \rho_8 = 1/2$ Erlangs (***γραμμές συμφόρησης***) και $\rho_9 = \rho_{10} = 1/3$ Erlangs

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (4/4)

Απάντηση στο Ερώτημα (**2**)

Το συνολικό προσφερόμενο φορτίο από άκρο σε άκρο $\gamma$ είναι:

$$\gamma = r_{\mathrm{A,B}} + r_{\mathrm{A,C}} + r_{\mathrm{A,D}} + r_{\mathrm{B,A}} + r_{\mathrm{B,C}} + r_{\mathrm{B,D}} + r_{\mathrm{C,A}} + r_{\mathrm{C,B}} + r_{\mathrm{C,D}} + r_{\mathrm{D,A}} + r_{\mathrm{D,B}} + r_{\mathrm{D,C}} \Rightarrow$$

$$\gamma = 12r = 4 \times 10^7 \text{ packets/sec}$$

Ο μέσος αριθμός πακέτων στα συστήματα $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{10}$ δίνονται από $\mathrm{E}(n_i) = \rho_i/(1-\rho_i)$:

$$\mathrm{E}(n_1) = \cdots = \mathrm{E}(n_8) = 1,\ \mathrm{E}(n_9) = \mathrm{E}(n_{10}) = 0.5 \text{ packets}$$

$$\text{και } \mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \textstyle\sum_{i=1}^{10} \mathrm{E}(n_i) = 8 \times 1 + 2 \times 0.5 = 9 \text{ packets}$$

Η μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο είναι από τον τύποι του ***Little***:

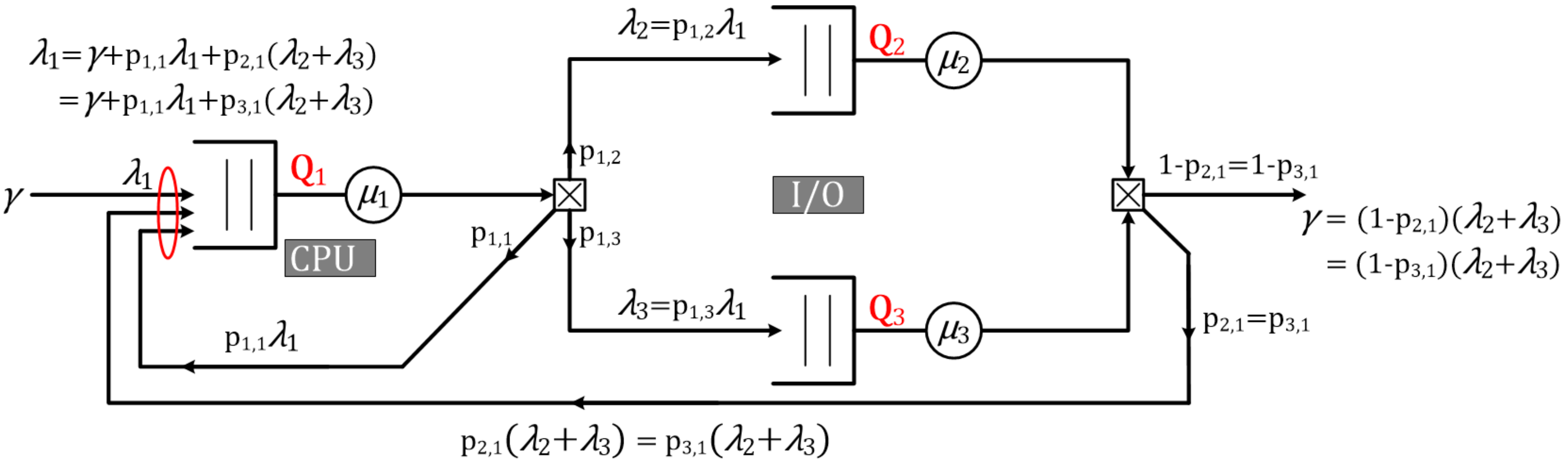
$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\gamma = 9/(4 \times 10^7) \text{ sec}$$

Η μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από το κόμβο A στο κόμβο C δίνεται από:

$$\mathrm{E}(T_{\mathrm{A,C}}) = p\{\mathrm{E}(T_{\mathrm{A,B}}) + \mathrm{E}(T_{\mathrm{B,C}})\} + (1-p)\{\mathrm{E}(T_{\mathrm{A,D}}) + \mathrm{E}(T_{\mathrm{D,C}})\} =$$

$$p\{1/(\mu_1 - \lambda_1) + 1/(\mu_3 - \lambda_3)\} + (1-p)\{1/(\mu_8 - \lambda_8) + 1/(\mu_6 - \lambda_6)\} = 4/10^7 \text{ sec}$$

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (1/3)




Θεωρείστε υπολογιστικό σύστημα που εξυπηρετεί κατά μέσο όρο $\gamma$ εντολές/sec που υποβάλλονται σαν διαδικασία Poisson. Το σύστημα αποτελείται από μια CPU που εξυπηρετεί την εντολή επιμερισμένη σε τμήματα (quanta ή time-slices) και υποσύστημα I/O (δύο δίσκοι) που εξυπηρετεί επαναλαμβανόμενες ενδιάμεσες κλήσεις σχετικές με την εντολή (π.χ. για ανταλλαγή δεδομένων και αναζήτηση υποπρογραμμάτων), ενώ μεσολαβεί για την τελική έξοδο - απάντηση

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (2/3)

- Κάθε εντολή εξυπηρετείται από την CPU του συστήματος, επιμερισμένη σε $\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}$ τμήματα (quanta ή time-slices) την εξυπηρέτηση των οποίων ακολουθεί κλήση I/O (ενδιάμεση ή τελική). Το υποσύστημα εξυπηρέτησης CPU αναπαρίσταται σαν ουρά αναμονής $\mathbf{Q}_1$ με εκθετική εξυπηρέτηση ρυθμού $\mu_1$ quanta/sec
- Η τυχαία μεταβλητή $\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}$ έχει μέσο όρο $\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})$ quanta και αναπαρίσταται σαν ανάδραση στο υποσύστημα CPU με τυχαία πιθανότητα $\mathrm{p}_{1,1}$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}) = \left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + 2\mathrm{p}_{1,1}\left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + 3\mathrm{p}_{1,1}^2\left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + 4\mathrm{p}_{1,1}^3\left(1-\mathrm{p}_{1,1}\right) + \cdots = 1/(1-\mathrm{p}_{1,1})$$

ή

$$\mathrm{p}_{1,1} = \frac{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}) - 1}{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})}$$

- Την επεξεργασία των τμημάτων $\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}$ μιας εντολής ακολουθεί κλήση I/O. Το υποσύστημα I/O αποτελείται από δύο συστήματα εξυπηρέτησης τα οποία αναπαρίστανται σαν ουρές αναμονής $\mathbf{Q}_2$ και $\mathbf{Q}_3$ με εκθετική εξυπηρέτηση ρυθμών $\mu_2$ και $\mu_3$ κλήσεις/sec. Η επιλογή $\mathbf{Q}_2$ ή $\mathbf{Q}_3$ γίνεται τυχαία με πιθανότητες $\mathrm{p}_{1,2}$ και $\mathrm{p}_{1,3}$ αντίστοιχα, $\mathrm{p}_{1,1} + \mathrm{p}_{1,2} + \mathrm{p}_{1,3} = 1$
- Θεωρούμε πως κάθε εντολή παράγει κατά μέσο όρο $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right)$ κλήσεις οι οποίες είτε επανέρχονται στο υποσύστημα CPU με πιθανότητες $\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1}$ ή ολοκληρώνεται με πιθανότητα $1-\mathrm{p}_{2,1} = 1-\mathrm{p}_{3,1}$

$$\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1} = \frac{\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right) - 1}{\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right)}$$

- Με $\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}}) = 5$ quanta, $\mu_1 = 10$ quanta/sec, $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}}\right) = 3$ κλήσεις, $\mu_2 = 5$ κλήσεις/sec, $\mu_3 =$ 3 κλήσεις/sec και αριθμό κλήσεων προς το $\mathbf{Q}_2$ διπλάσιων κατά μέσο όρο από το $\mathbf{Q}_3$, ζητείται ο μέγιστος ρυθμός $\gamma_{\max}$ εντολών/sec που οδηγεί το σύστημα σε κορεσμό. Για $\gamma = \gamma_{\max}/2$ υπολογίστε τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης μιας τυχαίας εντολής

# ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (3/3)

Με τις παραδοχές του Θεωρήματος ***Jackson*** έχω το ανοικτό δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1 $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ με μέσους ρυθμούς εισόδου:

$$\lambda_1 = \gamma + \mathrm{p}_{1,1}\lambda_1 + \mathrm{p}_{2,1}(\lambda_2 + \lambda_3),\ \lambda_2 = \mathrm{p}_{1,2}\lambda_1,\ \lambda_3 = \mathrm{p}_{1,3}\lambda_1$$

Για τα $\mathrm{p}_{1,1}$ **,** $\mathrm{p}_{2,1}$ και $\mathrm{p}_{3,1}$ ισχύουν $\mathrm{p}_{1,1} = \frac{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})-1}{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{CPU}})}$ και $\mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1} = \frac{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}})-1}{\mathrm{E}(\boldsymbol{N}_{\mathrm{I/O}})}$, άρα

$$\mathrm{p}_{1,1} = 4/5,\ \mathrm{p}_{2,1} = \mathrm{p}_{3,1} = 2/3,\ \mathrm{p}_{1,1} + \mathrm{p}_{1,2} + \mathrm{p}_{1,3} = 1 \text{ και } \mathrm{p}_{1,2} = 2\mathrm{p}_{1,3} \text{ άρα } \mathrm{p}_{1,3} = 1/15,\ \mathrm{p}_{1,2} = 2/15$$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1/15,\ \lambda_3 = \lambda_1/15,\ \lambda_1 = \gamma + 4\lambda_1/5 + 2\lambda_1/(3 \times 5) \text{ άρα}$$
$$\lambda_1 = 15\gamma, \qquad \lambda_2 = 2\gamma, \qquad \lambda_3 = \gamma$$

Για ρυθμούς εξυπηρέτησης $\mu_i$ (πελάτες/sec) η χρησιμοποίηση $\rho_i = \lambda_i / \mu_i < 1$ Erlang είναι:

$$\rho_1 = (15/10)\gamma,\ \rho_2 = (2/5)\gamma,\ \rho_3 = 0.5\gamma$$

Το στοιχείο συμφόρησης που οδηγεί το σύστημα σε κορεσμό είναι το $\mathbf{Q}_1$ για $\rho_1 = 1.5\gamma_{\max} = 1$ και άρα:

$$\gamma_{\max} = 2/3 \text{ εντολές/sec}$$

Για $\gamma = \gamma_{\max}/2 = 1/3$ εντολές/sec έχουμε:

$$\rho_1 = 1/2 \text{ Erlang},\ \rho_2 = 1/2 \text{ Erlang},\ \rho_3 = 1/2 \text{ Erlang και}$$
$$\mathrm{E}(n_i) = \rho_i/(1-\rho_i) \Rightarrow \mathrm{E}(n_1) = 1,\ \mathrm{E}(n_2) = 4/26,\ \mathrm{E}(n_3) = 5/25$$
$$\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \mathrm{E}(n_1) + \mathrm{E}(n_2) + \mathrm{E}(n_3) = 1.35 \text{ εντολές}$$

Μέση Απόκριση / Εντολή (***Average Response Time***) από τον τύπο του ***Little***: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\gamma = 4.05$ sec