ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems
Άσκηση Προσομοίωσης
Στατιστικές Εξόδου Ουράς M/M/1 - Θεώρημα Burke
Ανοικτά Δίκτυα Ουρών M/M/1 - Θεώρημα Jackson

Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

26/4/2017

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΟΥΡΑΣ M/M/1/10 (επανάληψη)

http://www.netmode.ntua.gr/courses/undergraduate/queues/simulation/

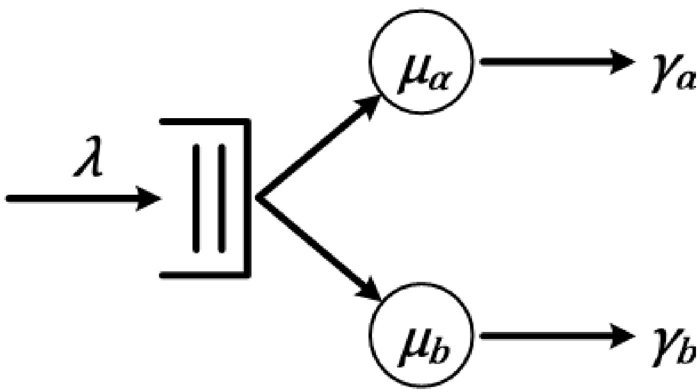
- Προετοιμασία Προγράμματος Προσομοίωσης Ουράς M/M/1/10 (***εξάσκηση ενόψει Εργασίας Προσομοίωσης***)
- Γλώσσα προγραμματισμού: Γενικής φύσεως (Java, Python, C, C++…) και όχι εξειδικευμένη γλώσσα Προσομοίωσης
- Υπολογισμός εργοδικών πιθανοτήτων P_k, $\mathrm{E}(k) = \sum_{k=0}^{10} P_k$ και $P_{\text{blocking}} = P_{10}$ για $\lambda = 1$ και $1/\mu = 0.5,\ 0.75,\ 0.85$ με μετρητές αφίξεων στις καταστάσεις $n(t) = k$ από την αρχή μέχρι 5.000, 10.000, 15.000 … αφίξεις. Σύγκριση με γνωστά αναλυτικά αποτελέσματα ουράς M/M/1/10:

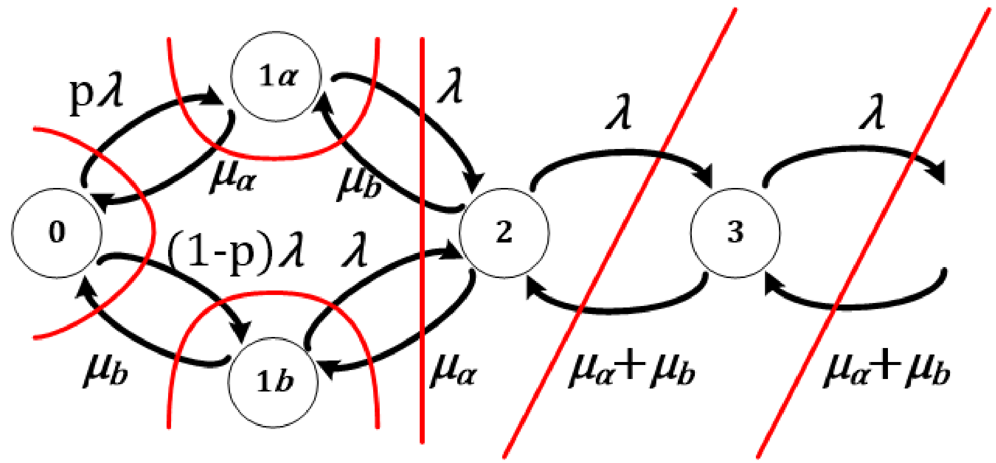
$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{10} P_k = 1$$

- Μέτρο σύγκλισης: Διαφορά μεταξύ διαδοχικών μετρήσεων του μέσου μήκους ουράς (από την αρχή μέχρι 5.000, 10.000, 15.000… αφίξεις) μέχρι εξαντλήσεως του διαθέσιμου χρόνου αν δεν διαπιστωθεί σύγκλιση νωρίτερα (όριο 200.000 γεγονότα, αφίξεις + εξυπηρετήσεις)
- **Υπενθύμιση:** Η στατιστική σύγκλιση επιταχύνεται αν αγνοήσουμε στη καταμέτρηση αφίξεων στις διάφορες καταστάσεις τις πρώτες μεταβάσεις (π.χ. 1-5.000 αφίξεις) που αντιστοιχούν στο ***μεταβατικό φαινόμενο*** προς την εργοδική κατάσταση
- **Γενική Οδηγία**: Για debugging εξάγεται αρχικά λεπτομερές ***trace*** των μεταβάσεων της κατάστασης του συστήματος το οποίο θα απενεργοποιηθεί μετά την επιβεβαίωση της ορθότητας του κώδικα

ΟΥΡΑ Μ/Μ/2 (επανάληψη)

- Αφίξεις Poisson με ρυθμό $\lambda_k = \lambda$
- 2 ανεξάρτητοι εκθετικοί εξυπηρετητές $(\alpha), (b)$ με άνισους ρυθμούς μ_α, μ_b
- Άπειρη Χωρητικότητα
- Άφιξη σε άδειο σύστημα δρομολογείται στον (α) με πιθανότητα p και στον (b) με πιθανότητα $(1 - \mathrm{p})$





Εξισώσεις Ισορροπίας:

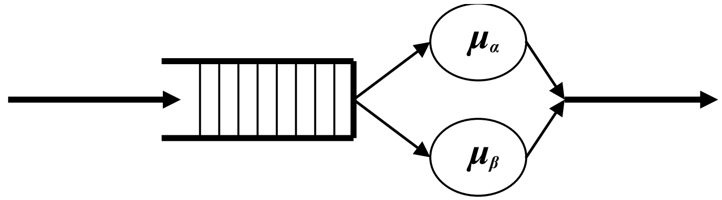
$$\lambda P_0 = \mu\alpha P_{1\alpha} + \mu_b P_{1b}$$
$$(\lambda + \mu_\alpha) P_{1\alpha} = \mathrm{p}\lambda P_0 + \mu_b P_2$$
$$(\lambda + \mu_b) P_{1b} = (1 - \mathrm{p})\lambda P_0 + \mu\alpha P_2$$
$$\lambda(P_{1\alpha} + P_{1b}) = (\mu_\alpha + \mu_b) P_2, \lambda P_k = (\mu_a + \mu_b) P_{k+1}, \; k = 2,3, \ldots$$
$$P_0 + P_{1\alpha} + P_{1b} + P_2 + P_3 + \cdots = 1, \quad \lambda/(\mu_\alpha + \mu_b) < 1$$ για σύγκληση (εργοδικότητα)

Βαθμοί Χρησιμοποίησης – Ρυθμαποδόσεις Εξυπηρετητών:

$$U_\alpha = 1 - P_0 - P_{1b} \qquad \gamma_\alpha = \mu_\alpha U_\alpha$$
$$U_b = 1 - P_0 - P_{1\alpha} \qquad \gamma_b = \mu_b U_b$$
$$\gamma = \lambda = \gamma_a + \gamma_b$$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Ουρά M/M/2/10 με Κατώφλι *k*



- Αριθμός πελατών στο σύστημα είναι μικρότερος ή ίσος του ***k*** (***k*** = 1,…, 9) οι αφίξεις δρομολογούνται πάντα στον εξυπηρετητή ***α***, ο δε ***β*** παραμένει ανενεργός (idle). Ο εξυπηρετητής ***β*** ενεργοποιείται όταν ο αριθμός των πελατών στο σύστημα ξεπεράσει το κατώφλι ***k***
- Αφίξεις Poisson, μέσου ρυθμού λ = 1, λ = 2 και λ = 3 πελάτες/sec (τρεις περιπτώσεις), ανεξάρτητες εκθετικές εξυπηρετήσεις ρυθμού $\mu_\alpha = \mu_\beta$ = 4 πελάτες/sec
- Με απλή προσομοίωση συστημάτων Markov να υπολογιστούν και να παρασταθούν γραφικά:
  - Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα για ***k*** =1,…,9 για τις τρείς περιπτώσεις ρυθμού εισόδου, όπως αυτό εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, μέχρι κάποιο κριτήριο σύγκλισης (π.χ. διαδοχικές τιμές μέσου αριθμού πελατών να μη διαφέρει πάνω από 0.001)
  - Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, μετά την σύγκλιση ανωτέρω (ερώτημα 1) σαν συνάρτηση του ***k*** για κάθε τιμή του λ
  - Οι ρυθμοί απόδοσης (throughput) στους δύο εξυπηρετητές γ_α και γ_β καθώς και ο λόγος $\gamma_\alpha/\gamma_\beta$, μετά την σύγκληση (ερώτημα 1) σαν συνάρτηση του k για κάθε τιμή του λ
  - Σχολιάστε τα αποτελέσματα ως προς την ταχύτητα σύγκλησης και την απόδοση του συστήματος σαν συνάρτηση του ***k***
- 9/6/2017: Ηλεκτρονική παράδοση, 20% της συνολικής βαθμολογίας
- Χρησιμοποιήσατε κάποια κλασσική γλώσσα προγραμματισμού (C, C++, Java, Python) και όχι ειδική γλώσσα προσομοίωσης. Να περιληφθεί αρχείο με τον πηγαίο κώδικα (source code) και σχήμα καταστάσεων με ρυθμούς μεταβάσεων

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (1/2)

- ***Θεώρημα Burke***: Η έξοδος πελατών από ουρά *M/M/1* ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό τον ρυθμό εισόδου λ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

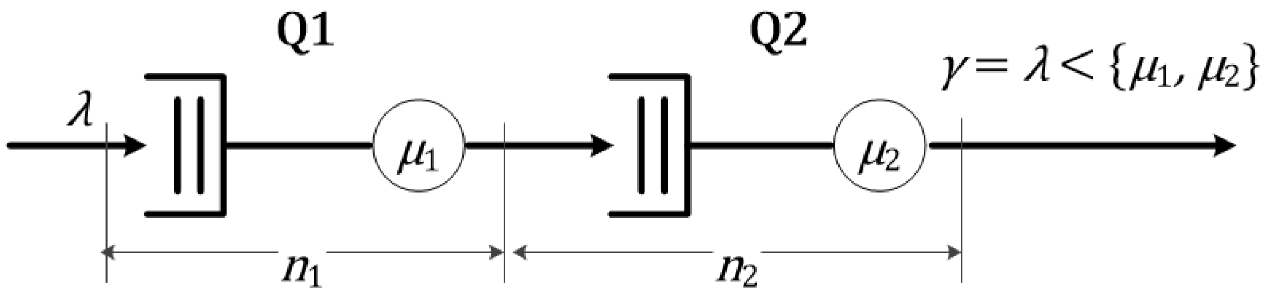
  - Θεωρούμε δύο εκθετικές ουρές $\mathbf{Q1}, \mathbf{Q2}$ (π.χ. μεταγωγείς πακέτου) με χρόνους εξυπηρέτησης **ανεξάρτητες** εκθετικές μεταβλητές με μέσους όρους $1/\mu_1, 1/\mu_2$
  - Προσέγγιση με **Παραδοχή Ανεξαρτησίας *Leonard Kleinrock* σε δίκτυα μεταγωγής πακέτου**: Οι χρόνοι εξυπηρέτησης (ανάλογοι του μήκους πακέτου) δεν διατηρούν τα μεγέθη τους όταν προωθούνται μεταξύ συστημάτων (ουρών) εξυπηρέτησης . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ανατίθενται σε κάθε σύστημα σαν **ανεξάρτητε**ς εκθετικές τυχαίες μεταβλητές
  - Η είσοδος στην $\mathbf{Q1}$ είναι Poisson με ρυθμό λ (η $\mathbf{Q1}$ είναι ***M/M/1***), $\lambda < \{\mu_1, \mu_2\}$ για εργοδικότητα (ισορροπία)
  - Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ όπου n_1# πελατών στην $\mathbf{Q1}$, n_2 # πελατών στην $\mathbf{Q2}$
  - Καταστρώνουμε το διάγραμμα μεταβάσεων καταστάσεων Markov σε δύο διαστάσεις και γράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας
  - Εξετάζουμε αν οι εργοδικές πιθανότητες έχουν **μορφή γινομένου** (***product form solution***)
    $P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2)\ ?= P(n_1)P(n_2)? = (1-\rho_1){\rho_1}^{n_1}(1-\rho_2){\rho_2}^{n_2} = K{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}$
    όπου $\rho_1 = \lambda/\mu_1$, $\rho_2 = \lambda/\mu_2$ και $K = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$ η ***Σταθερά Κανονικοποίησης***:
    $$\sum_{\boldsymbol{n}} P(\boldsymbol{n}) = 1$$
  - Οι εξισώσεις επαληθεύονται, και επομένως αποτελούν τη ***μοναδική*** λύση (μονοσήμαντα).
  - Άρα οι δύο ουρές συμπεριφέρονται σαν **δύο ανεξάρτητες ουρές *M/M/1*** σε ισορροπία με ρυθμούς εισόδου λ και ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_1, μ_2

Έπεται πως ο ρυθμός εξόδου της $\mathbf{Q1}$ *(και εισόδου στην* $\mathbf{Q2}$*) είναι Poisson με ρυθμό* λ

ΔΙΚΤΥΟ ΔΥΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ ΕΝ ΣΕΙΡΑ (2/2)

Επαλήθευση Υπόθεσης Γινομένου

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2) = P(n_1)P(n_2) = (1-\rho_1){\rho_1}^{n_1}(1-\rho_2){\rho_2}^{n_2} = K{\rho_1}^{n_1}{\rho_2}^{n_2}$$



Επαλήθευση για Αντιπροσωπευτικές Καταστάσεις:

$\boldsymbol{n} = (2,2)$

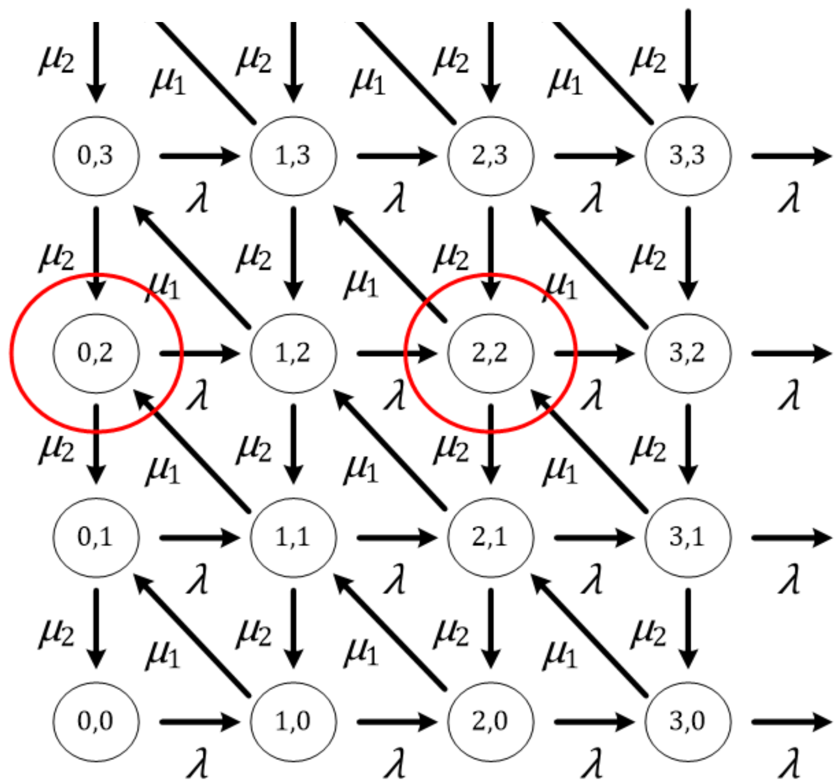
$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(2,2) =?\, \lambda P(1,2) + \mu_1 P(3,1) + \mu_2 P(2,3)$$

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^2 =?\, \lambda K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2)^2 + \mu_1 K(\lambda/\mu_1)^3(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_1)^2(\lambda/\mu_2)^3 \;\surd$$

$\boldsymbol{n} = (0,2)$

$$(\lambda + \mu_2)P(0,2) =?\; \mu_1 P(1,1) + \mu_2 P(0,3)$$

$$(\lambda + \mu_2)K(\lambda/\mu_2)^2 =?\; \mu_1 K(\lambda/\mu_1)\,(\lambda/\mu_2) + \mu_2 K(\lambda/\mu_2)^3 \;\surd$$



ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (1/3)

ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΓΙΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΔΙΚΤΟΥ ΧΩΡΙΣ ΜΝΗΜΗ (Markov)

- Έξοδος Ουράς M/M/1 – Θεώρημα ***Burke***
  - Οι αναχωρήσεις πελατών από σύστημα ***M/M/1*** αποτελούν διαδικασία Poisson

- Άθροιση – Διάσπαση διαδικασιών Poisson
  - Άθροιση (aggregation) ανεξαρτήτων ροών Poisson λ_1, λ_2 : Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
  - Τυχαία Διάσπαση (random split, routing) ροής Poisson μέσου ρυθμού λ με πιθανότητες $p,\ q = 1 - p$:

    Παράγει διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $p\lambda, (1-p)\lambda$

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (2/3)

ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

Παραδοχές

- Ανοικτό δίκτυο M ***δικτυακών κόμβων εξυπηρέτησης κορμού*** (ουρών αναμονής) $\mathbf{Q}_i$, $i = 1,2, \dots, M$ με εκθετικούς ρυθμούς εξυπηρέτησης μ_i

- Αφίξεις πελατών (πακέτων) από εξωτερικές πηγές (sources) άμεσα συνδεμένες στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_s$προς εξωτερικούς προορισμούς (destinations) άμεσα συνδεμένους στον δικτυακό κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_d$: ***Ανεξάρτητες ροές Poisson*** μέσου ρυθμού γ_{sd} όπου $s, d \in \{1,2, \dots, M\}$

- Εσωτερική ***δρομολόγηση*** (routing) με τυχαίο τρόπο και πιθανότητα δρομολόγησης πελάτη από τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ στον κόμβο $\mathbf{Q}_j : r_{ij}$

- Έστω $\delta_{sd}(i) = 1$ αν πελάτες (πακέτα) της ροής (s, d) διακινούνται μέσα από τον κόμβο κορμού $\mathbf{Q}_i$ ή αλλιώς $\delta_{sd}(i) = 0$. Τότε τον κόμβο εξυπηρέτησης $\mathbf{Q}_i$ διαπερνούν ροές με συνολικό μέσο ρυθμό $\lambda_i = \sum_{d=1}^{M} \sum_{s=1}^{M} \gamma_{sd} \delta_{sd}(i)$

- Οι χρόνοι εξυπηρετήσεις πελατών όπως διαπερνούν το δίκτυο δεν διατηρούν την τιμή τους (έλλειψη μνήμης) αλλά αποκτούν χρόνο εξυπηρέτησης ανάλογα με την κατανομή του κάθε εξυπηρετητή (***Kleinrock's Independence Assumption***, επαληθευμένη με προσομοιώσεις σε δίκτυα με όχι απλοϊκή τοπολογία)

ΑΝΟΙΚΤΑ ΔΙΚΤΥΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΟΥΡΩΝ (3/3)

ΘΕΩΡΗΜΑ JACKSON

Αποτέλεσμα

- Κατάσταση του δικτύου: Διάνυσμα $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_M)$ αριθμού πελατών n_i στις ουρές (κόμβους κορμού) $\mathbf{Q}_i$

- Η ***Εργοδική Πιθανότητα*** των καταστάσεων $\boldsymbol{n}$ (αν υπάρχει) έχει μορφή γινομένου (product form) ***ανεξαρτήτων ουρών M/M/1***

$$P(\boldsymbol{n}) = P(n_1, n_2, \ldots, n_M) = P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_M)$$

$$P(n_i) = (1-\rho_i){\rho_i}^{n_i} \text{ με } \rho_i = \lambda_i/\mu_i$$

  όπου λ_i ο συνολικός μέσος ρυθμός (***Poisson***) των πελατών που διαπερνούν τον κόμβο κορμού (ουρά) $\mathbf{Q}_i$ με ρυθμό εκθετικής εξυπηρέτησης μ_i

- Ουρά (κόμβος κορμού) συμφόρησης: Η $\mathbf{Q}_i$ με το μέγιστο ρ_i

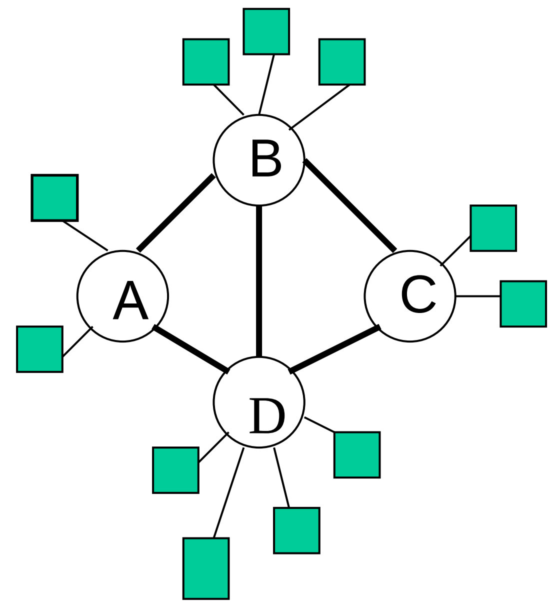
- Μέσος αριθμός πελατών (πακέτων) στο δίκτυο: $\mathrm{E}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{M} \mathrm{E}(n_\iota) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο: $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(\boldsymbol{n})/\boldsymbol{\gamma}$ (***τύπος Little***)
  όπου $\boldsymbol{\gamma}$ ο συνολικός μέσος ρυθμός πελατών (***Poisson***) που εισέρχονται στο δίκτυο από εξωτερικές πηγές (***network throughput***) $\boldsymbol{\gamma} = \sum_{s=1}^{M} \sum_{d=1}^{M} \gamma_{sd}$

- Μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από κόμβο s σε κόμβο d: $\mathrm{E}(T_{sd}) = \sum_{i-1}^{M} \delta_{sd}(i) \frac{1/\mu_i}{1-\rho_i}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (1/2)
(Internet – Intranet)

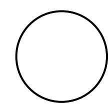
- Θεωρήστε ένα δίκτυο μεταγωγής πακέτων.
  - Όλες οι γραμμές (FDX) θεωρούνται χωρητικότητας $C_i = C = 10$ Gbits/sec. Το μέσο μήκος του πακέτου είναι $E(L) = 1000$ bits (θεωρείστε εκθετική κατανομή).
  - Μεταξύ κόμβων θεωρείστε προσφερόμενους ρυθμούς πακέτων Poisson, με ίσους ρυθμούς r packets/sec (από άκρο σε άκρο).
  - Πακέτα από το A στο C και αντίστροφα δρομολογούνται εξίσου στους δύο ισότιμους δρόμους: (A-B-C) και (A-D-C). Τα πακέτα μεταξύ κόμβων κατευθείαν συνδεδεμένων (A-B), (A-D), (B-D), (B-C), (D-C) δρομολογούνται κατευθείαν.



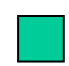
- (A) Βρείτε το ρυθμό r ώστε η γραμμή συμφόρησης (με τη μέγιστη χρησιμοποίηση) να είναι 50%

- (B) Με το r του (A) βρείτε τη μέση καθυστέρηση ενός τυχαίου πακέτου στο δίκτυο (από άκρο σε άκρο)

ΟΔΗΓΙΑ: Οι FDX γραμμές του δικτύου κορμού αναλύονται σε δύο ουρές με ροές πακέτων συνολικού μέσου ρυθμού λ_i (προκύπτει από την δρομολόγηση πακέτων) και μέσου ρυθμού εκθετικής εξυπηρέτησης $\mu_i = C_i/E(L)$. Το ανοικτό δίκτυο ουρών (**επόμενη διαφάνεια**) αναλύεται σαν **δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1** με το **Θεώρημα του Jackson**



Κόμβος Δικτύου Κορμού (Δρομολογητής Κορμού, Backbone Router, Packet Switch)



Κόμβος Εισόδου (Η/Υ, Access Node, Customer Network - LAN)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΔΙΚΤΥΟ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ ΠΑΚΕΤΩΝ (2/2)