ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ
Queuing Systems
Εισαγωγή (2/2)
Επισκόπηση Γνώσεων Πιθανοτήτων (1/2)

Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

8/3/2017

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (1/4)

(Επανάληψη)

– **Ένταση φορτίου (traffic intensity)**
Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή:
{Μέσος ***Χρόνος εξυπηρέτησης***}/ {Μέσος ***Χρόνος μεταξύ αφίξεων***}

$$\rho \triangleq \frac{\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \lambda \mathrm{E}(s) = \lambda/\mu \text{ (Erlangs)}$$

Ένα ***Erlang*** αντιπροσωπεύει το φόρτο κυκλοφορίας που εξυπηρετείται από έναν εξυπηρετητή που ασχολείται το 100% του χρόνου (π.χ. 1 call-minute per minute). Ένας εξυπηρετητής ασχολείται για 30 λεπτά σε μια περίοδο μιας ώρας → μεταφέρει 0.5 Erlangs κυκλοφοριακή ένταση

– **Διεκπεραίωση πελατών – Ρυθμαπόδοση (Throughput)** γ πελάτες/sec
Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή:

$$\gamma = \lambda(1 - \mathrm{P}\{\text{blocking}\}) \leq \lambda, \qquad \gamma < \mu$$

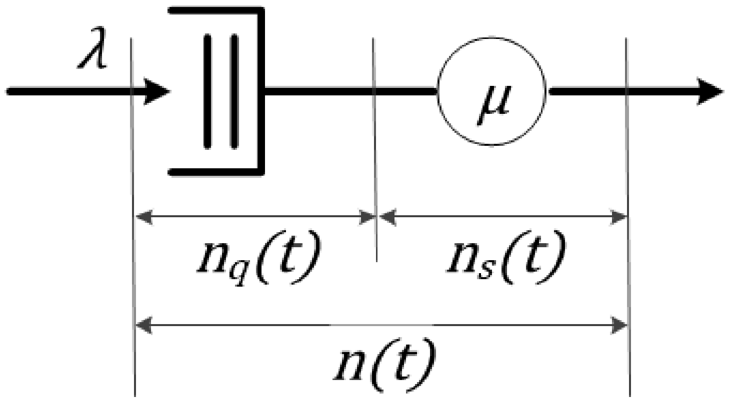
όπου $\mathrm{P}\{\text{blocking}\}$ είναι η πιθανότητα να χαθεί ένας πελάτης επειδή βρήκε το σύστημα πλήρες

- σε τηλεφωνικά δίκτυα: βαθμός ποιότητας, **Grade of Service** - **GoS**
- σε δίκτυα δεδομένων: μία παράμετρος ποιότητας υπηρεσίας, **Quality of Service** - **QoS**

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (2/4)

(Επανάληψη)

$$\gamma = \lambda(1 - P\{\text{blocking}\}) \leq \lambda, \;\; \gamma < \mu$$



- **Μέσος ρυθμός απωλειών, ποσοστό απωλειών, πιθανότητα απώλειας πελάτη**
  - Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή

    Μέσος ρυθμός απωλειών: $\lambda - \gamma$

    Ποσοστό απωλειών: $\frac{\lambda-\gamma}{\lambda} = \text{P}\{\text{blocking}\}$

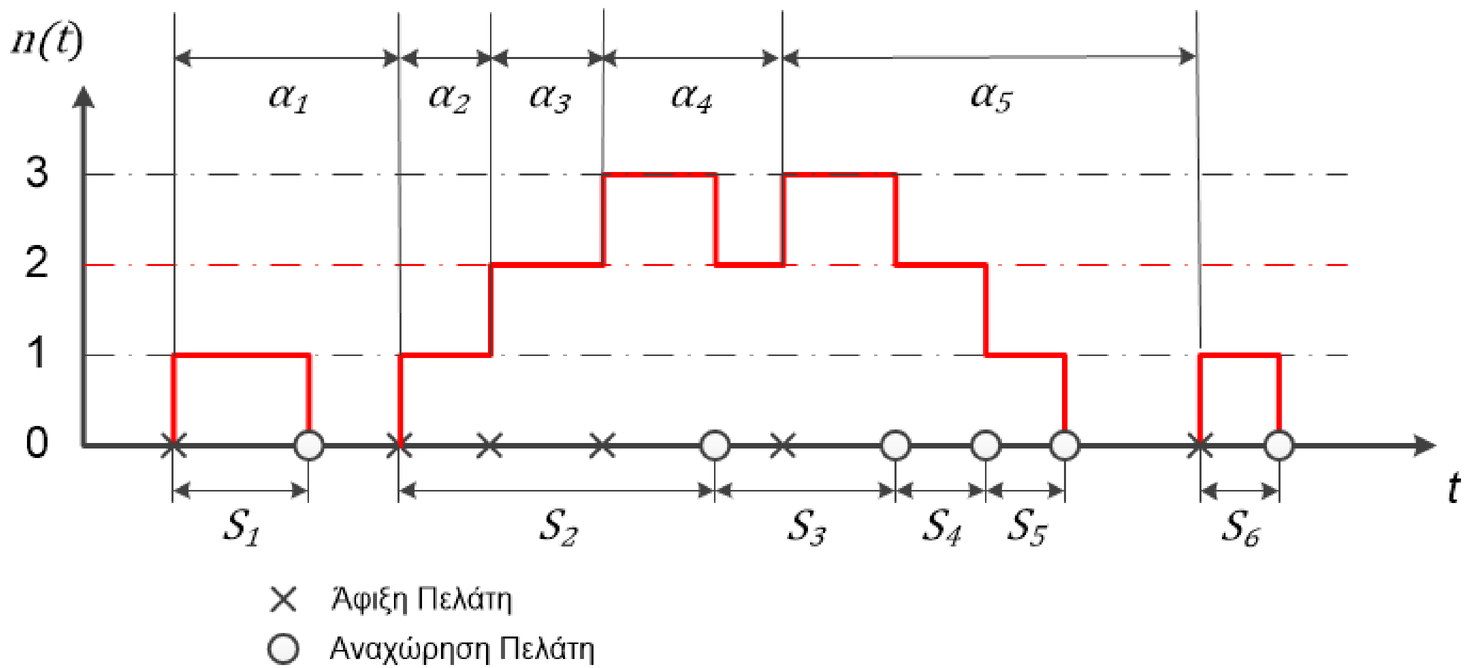
- **Βαθμός χρησιμοποίησης εξυπηρετητή (server utilization)**
  - Σε περίπτωση 1 ουράς, 1 εξυπηρετητή

$$u \triangleq \gamma/\mu$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (3/4)

(Επανάληψη)

Εξέλιξη Αριθμού Πελατών στο Σύστημα



- **Αριθμός πελατών (κατάσταση)**

  $n(t)$, στοχαστική ανέλιξη – χρονοσειρά
  (stochastic process, time series)

- **Μέσος αριθμός πελατών** $\mathrm{E}\{n(t)\}$

- **Μέσος χρόνος καθυστέρησης (average time delay)**

  Μέσος χρόνος αναμονής (waiting time) + Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$$\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(W) + \mathrm{E}(s)$$

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ (4/4)

- $n(t) = 0,1,2,\ldots,K$: Τυχαία μεταβλητή που ορίζει την **κατάσταση** του Συστήματος Αναμονής την χρονική στιγμή t . Η τυχαία συνάρτηση $n(t)$ αποτελεί **στοχαστική ανέλιξη** (διαδικασία) διακριτής κατάστασης με μεταβάσεις καταστάσεων σε συνεχή χρόνο (**discrete state, continuous time stochastic process**)

  $n(t) = n_q(t) + n_s(t) \leq K$ όπου:

  K η μέγιστη χωρητικότητα συστήματος

  $n_q(t) = 0,1,2,\ldots,K-1$ ο αριθμός πελατών σε αναμονή

  $n_s(t) = 0,1$ ο αριθμός πελατών στην εξυπηρέτηση

- $\mathrm{P}_k(t) = \mathrm{P}\{n(t) = k\}$: Η πιθανότητα παρουσίας k πελατών (σε αναμονή και εξυπηρέτηση) τη χρονική στιγμή t

- Σύστημα σε ισορροπία: $\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}_k(t) = P_k > 0$ (**εργοδικές οριακές πιθανότητες**). Οι καταστάσεις $n(t) = k$ συστήματος σε ισορροπία είναι απείρως επισκέψιμες (**positive recurrent**): Μετά από παρέλευση μεγάλου χρονικού διαστήματος t, το μεταβατικό φαινόμενο παρέρχεται και οι αρχικές συνθήκες δεν επηρεάζουν την περαιτέρω εξέλιξη του συστήματος που παλινδρομεί τυχαία ανάμεσα στις απείρως επισκέψιμες καταστάσεις
- Μέσοι όροι των $n(t), n_q(t), n_s(t)$: $\mathrm{E}\{n(t)\} = \mathrm{E}\{n_q(t)\} + \mathrm{E}\{n_s(t)\}$
- Χρόνος καθυστέρησης (αναμονή + εξυπηρέτηση) συστήματος σε ισορροπία:

$$T = W + s, \; \mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(W) + \mathrm{E}(s)$$

ΤΥΠΟΣ Little

(Σύστημα σε Ισορροπία)

Χρόνος καθυστέρησης: $T = W + s$

Τύπος Little:

$$\mathrm{E}(T) = \frac{\mathrm{E}\{n(t)\}}{\gamma} = \mathrm{E}(W) + \mathrm{E}(s)$$

$$= \frac{\mathrm{E}\{n_q(t)\}}{\gamma} + \frac{\mathrm{E}\{n_s(t)\}}{\gamma}$$

Μη αυστηρή απόδειξη:

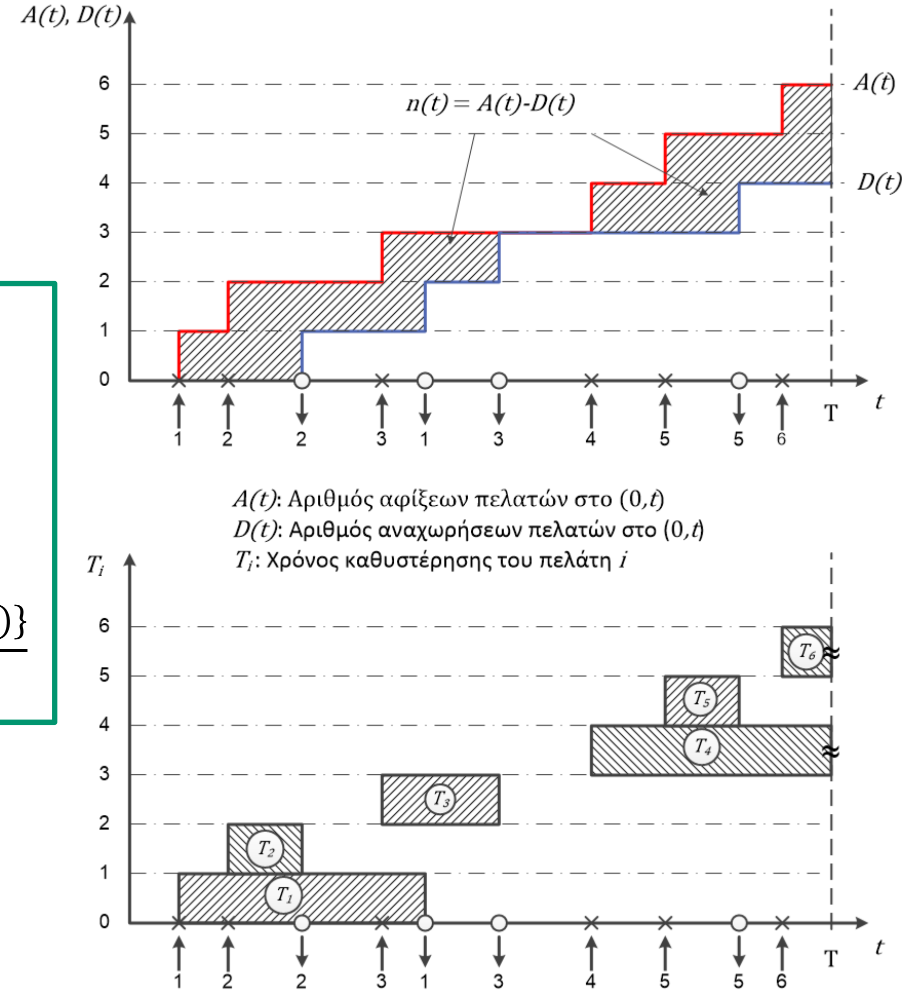
$A(\mathrm{T})$: Συνολικός αριθμός αφίξεων στο $(0, \mathrm{T})$

$D(\mathrm{T})$: Συνολικός αριθμός αναχωρήσεων στο $(0, \mathrm{T})$

$$\gamma \approx \frac{A(\mathrm{T})}{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{T} \to \infty$$

$\mathrm{E}\{n(t)\} \approx \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} [A(t) - D(t)]dt$: Μέσος όρος του $n(t)$, $\mathrm{T} \to \infty$

$$\mathrm{E}(T) \approx \frac{1}{A(\mathrm{T})} \sum_{i=1}^{A(\mathrm{T})} T_i \approx \frac{1}{A(\mathrm{T})} \int_0^{\mathrm{T}} [A(t) - D(t)]dt \approx \frac{\mathrm{E}\{n(t)\}}{\gamma}$$



Για ουρά με **ένα** εξυπηρετητή:

$$\mathrm{E}\{n_s(t)\} = \gamma \mathrm{E}(s) = \frac{\gamma}{\mu}$$

$$= 0 \cdot \mathrm{P}\{n(t) = 0\} + \mathrm{P}\{n(t) > 0\}$$

$$= \mathrm{P}\{n(t) > 0\}$$

$\Rightarrow$ ο βαθμός χρησιμοποίησης του εξυπηρετητή

$$u = \frac{\gamma}{\mu} = \mathrm{P}\{n(t) > 0\})$$

ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

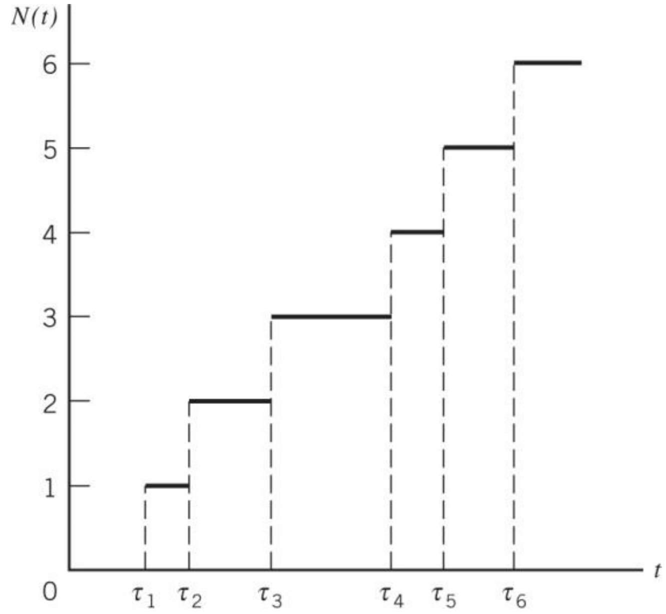
- ***A/S/N/K***
  - *A* : Τύπος διαδικασίας εισόδου πελατών
  - *S* : Τύπος τυχαίας μεταβλητής χρόνου εξυπηρέτησης
  - *N*: Αριθμός εξυπηρετητών
  - *K* : Χωρητικότητα συστήματος (μέγιστος αριθμός πελατών στην αναμονή + εξυπηρέτηση)

- *Παραδείγματα*
  - ***M/M/1****:* Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος (*μηδενικές απώλειες ή αστάθεια*)
  - ***M/D/1:*** Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης σταθεροί (*Deterministic*), 1 εξυπηρετητής, άπειρη χωρητικότητα συστήματος
  - ***M/G/1/4:*** Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης γενικής κατανομής (*General*), 1 εξυπηρετητής, χωρητικότητα συστήματος 4 πελάτες
  - ***M/M/4/8****:* Αφίξεις Poisson (*Markov, Memoryless*), ανεξάρτητοι χρόνοι εξυπηρέτησης εκθετικοί (*Markov*), 4 εξυπηρετητές, χωρητικότητα συστήματος 8 πελάτες: *Μοντέλο κέντρου κλήσεων (call center) με 4 χειριστές – τηλεφωνητές & μέχρι 4 κλήσεις στην αναμονή*

Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΗΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ POISSON

Η τυχαία εμφάνιση παλμών περιγράφεται σαν μια Στοχαστική Ανέλιξη Απαρίθμησης *(Counting Process)* $N(t)$ που καταμετρά τυχαία γεγονότα (αφίξεις πελατών) στο διάστημα $(0, t)$.

Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα $(t, t+T)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$. Κάτω από συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης *(τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον)*, η ν ακολουθεί την **κατανομή *Poisson* με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος** T: $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό *(rate)* εμφανίσεων (γεγονότα ανά μονάδα χρόνου)



Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (1/3)

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή $\nu = N(t+T) - N(t)$ απαρίθμησης γεγονότων σε χρονικό διάστημα παρατήρησης T που εμφανίζονται **τυχαία** και **ανεξάρτητα** από παρελθούσες ή μελλοντικές εμφανίσεις γεγονότων στο δείγμα (υλοποίηση) της Στοχαστικής Ανέλιξης μετρητή $N(t)$ στο οποίο συνεισφέρουν (**ιδιότητα έλλειψης μνήμης *Markov***)

Ο μέσος όρος εμφανίσεων γεγονότων στο διάστημα T είναι $\mathrm{E}_T[\nu] = \lambda T$

Εφαρμογές σε ανεξάρτητες εμφανίσεις τυχαίων γεγονότων:

- Τυχαίες εκρήξεις που προκαλούν τον **ΘΟΡΥΒΟ ΒΟΛΗΣ** σε ηλεκτρονικές συσκευές επικοινωνών
- Ανεξάρτητες τυχαίες **αφίξεις πελατών** σε **ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΟΥΡΩΝ ΑΝΑΜΟΝΗΣ** με απαιτήσεις εξυπηρέτησης όπως:
  - Διεκπεραίωση Τηλεφωνικών Κλήσεων
  - Διακίνηση Πακέτων Δεδομένων στο Internet
  - Κυκλοφορία Αυτοκίνητων σε Οδικά Συστήματα
  - Αγορές και Πληρωμές σε Καταστήματα
  - Επεξεργασία Δεδομένων σε Κοινές Υπολογιστικές Υποδομές

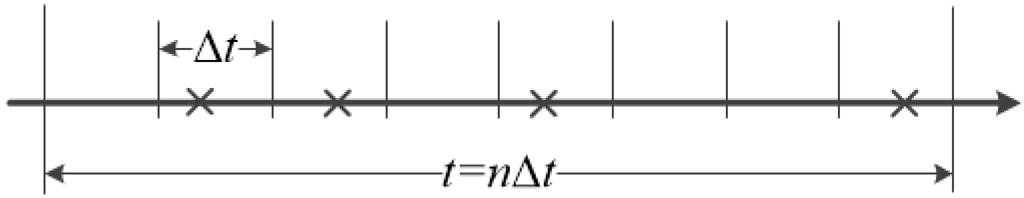
Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (2/3)

Η Κατανομή Poisson σαν Όριο Διωνυμικής Κατανομής

Ανεξάρτητες εμφανίσεις $\{N(t) = k\}$ γεγονότων (*σημείων*) ***Poisson*** στο διάστημα $(0, t)$ με ρυθμό λ σημεία/sec ορίζουν Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή *(Discrete Random Variable)* $\{\nu = k\}$ με Κατανομή Μάζας Πιθανότητας

$$\mathrm{P}_t[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

Απόδειξη



- Διαιρώ το διάστημα t σε n υποδιαστήματα, $t = n\Delta t$
- Πραγματοποιώ n ανεξάρτητες δοκιμές Bernouilli, μια σε κάθε υποδιάστημα, με δύο εναλλακτικές: Εμφάνιση (***επιτυχία***) με πιθανότητα $p = \lambda\Delta\mathrm{t}$, μη εμφάνιση (***αποτυχία***) με $1 - p$
- Η πιθανότητα k επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές δίνεται από την Διωνυμική Κατανομή:

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \binom{n}{k} (\lambda\Delta t)^k (1 - \lambda\Delta t)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

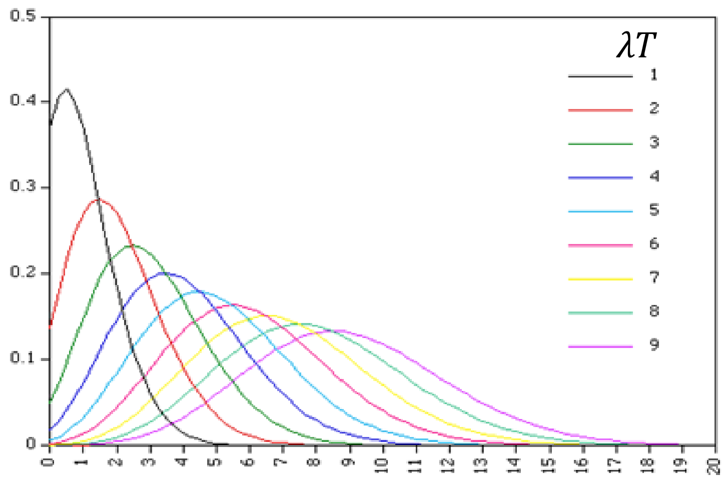
- Στο όριο $\Delta t \to 0$, $n \to \infty$, $t = n\Delta t$ έχουμε $\frac{n!}{(n-k)!} \to n^k$, $\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda t}$ και

$$\mathrm{P}[N(t) = k] = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \to \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON (3/3)

Κατανομή Poisson για Διαφορετικές Τιμές του $\lambda T = \mathbf{E}[N(T)]$

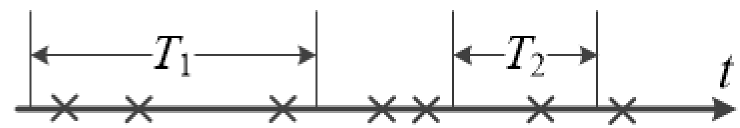
(μέσος αριθμός εμφανίσεων γεγονότων σε διάστημα T)



Οι συνεχείς καμπύλες στο σχήμα είναι οι περιβάλλουσες των Συναρτήσεων Μάζας Πιθανότητας (Ιστογράμματος) της Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής Poisson

$$\mathrm{P}_T[\nu = k] \triangleq \mathrm{P}[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

Ιδιότητες της Στοχαστικής Ανέλιξης Poisson



- $\mathrm{E}[N(t)] = \sigma^2_{N(t)} = \lambda t$
- Ο συνολικός αριθμός σημείων Στοχαστική Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ σε μη υπερ-καλυπτόμενα χρονικά διαστήματα T_1, T_2 είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda(T_1 + T_2)$
- **Υπέρθεση** δυο **ανεξαρτήτων** Ανελίξεων Poisson $N_1(t), N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 δίνει Ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$
- **Διάσπαση** Ανέλιξης Poisson ρυθμού λ μέσω ανεξαρτήτων τυχαίων επαναλήψεων **Bernoulli** με πιθανότητες $p, q = 1 - p$ (π.χ. τυχαία δρομολόγηση χωρίς μνήμη) δημιουργεί ανεξάρτητες ανελίξεις (διαδικασίες) Poisson με μέσους ρυθμούς $\lambda_1 = p\lambda, \lambda_2 = q\lambda$